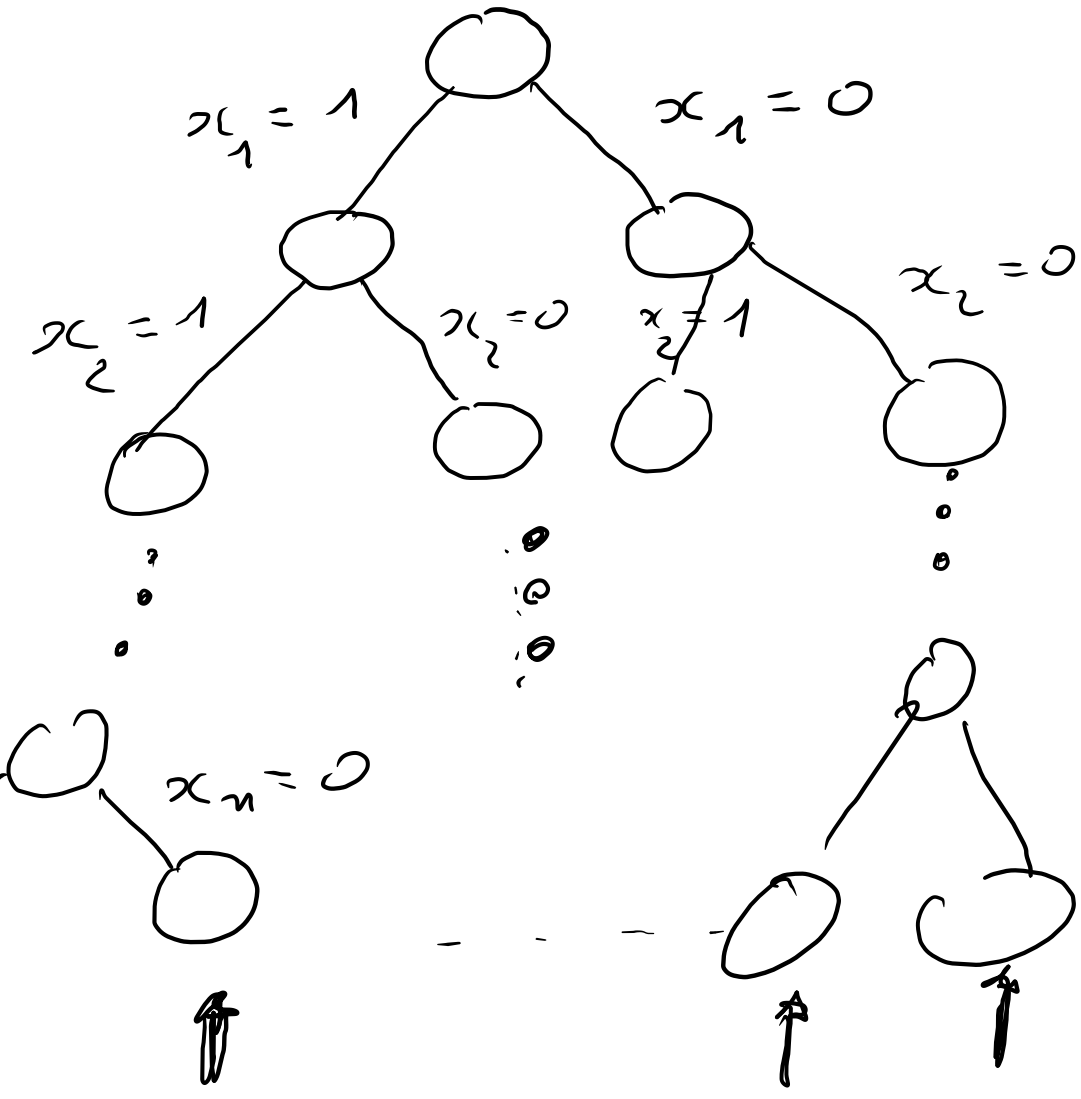
# Optimisation linéaire en nombres entiers

$$\max F(x) = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$$

$$\begin{cases} a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \leqslant d \\ x_i \in \{0, 1\}. \end{cases}$$

## Arbre binaire




$2^n$ évaluations

$x = (1, \dots, 1)$

En chaque sommet de l'arbre on va déterminer

2 estimations.

1) Majoration de $F$ : A chaque sommet $k$, on détermine la + petite valeur $b_k$ tq

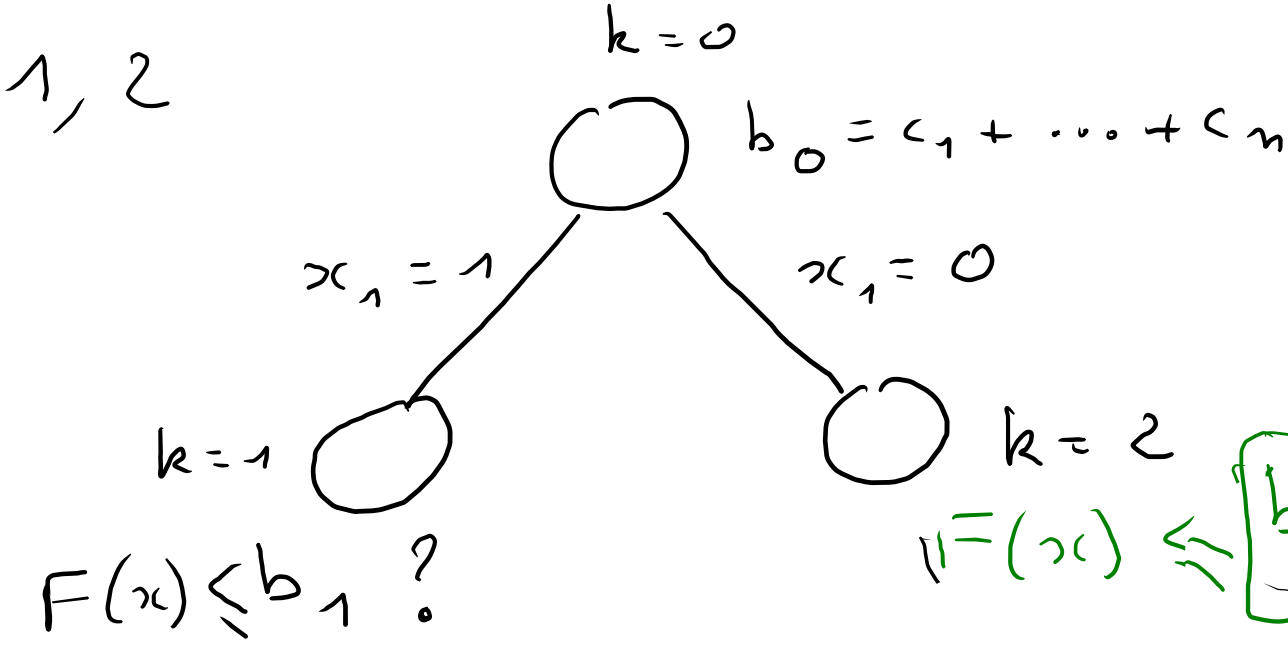
$$F(x) \leq b_k, \quad \forall x \in \{0,1\}^n$$

$$F(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

Pour $k=0$ $\quad F(x) \leq \underbrace{c_1 + c_2 + \dots + c_n = b_0}$ pour tout $x \in \{0,1\}^n$

$\triangle$ les $c_i \geq 0$ {

Pour $k = 1, 2$




- $x_1 = 1$

$F(x) = c_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \leq \underbrace{c_1 + \dots + c_n}_{b_1}$

$\leq c_2 + \dots + c_n$

$\Rightarrow \boxed{b_1 = b_0}$

- $x_1 = 0$ $\quad F(x) = c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \leq \underbrace{c_2 + \dots + c_n}_{b_2}$

On suppose qu'on connaisse une solution réalisable particulière qui donne une valeur $\bar{F}$.

Si $b_k < \bar{F}$ alors on sait que la solution optimale n'est pas dans cette partie là de l'arbre → on arrête l'exploration.

## 2) Estimation de la variable d'écart

$$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \leq d$$

$$0 \leq \underbrace{e}_{\text{variable d'écart}} = d - a_1 x_1 - \dots - a_n x_n \leq \underbrace{e_k}_{\text{estimation au sommet } k}$$

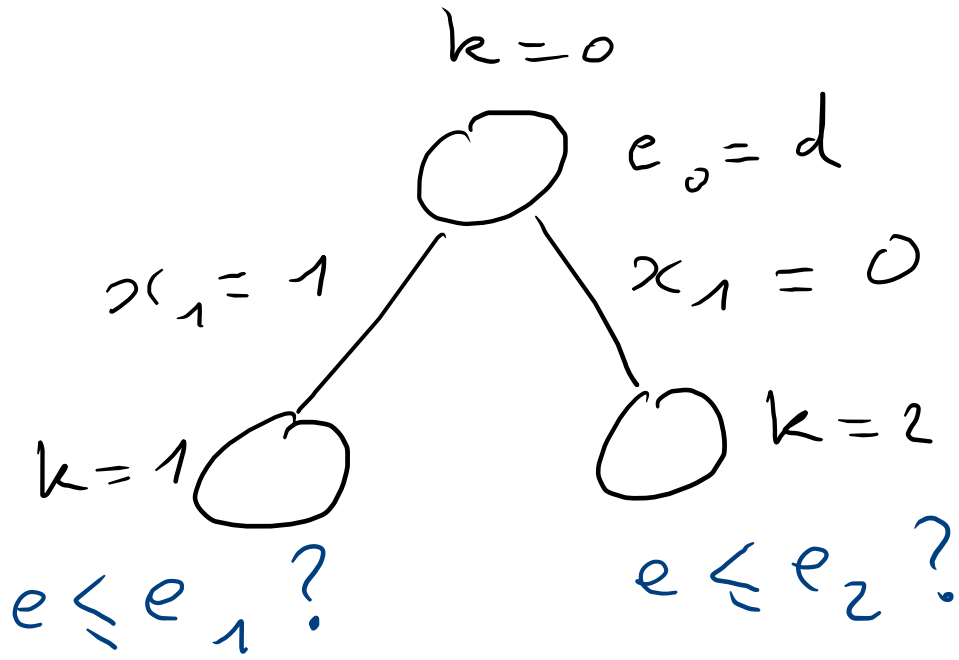
Si $e_k < 0 \Rightarrow$ arrêt de l'exploration la branche.

$\forall x$

- Pour $k = 0$ ⚠ les $a_i > 0$

$$e \leq \boxed{d = e_0} \quad \forall x \in \{0,1\}^n$$

• Pour $k = 1, 2$




Pour $x_1 = 1$

$$e = \underbrace{d - a_1}_{\leq 0} \underbrace{- a_2 x_2 - \dots - a_n x_n}_{\leq 0} \leq \begin{matrix} d - a_1 \\ \| \\ e_1 \end{matrix}$$

Pour $x_1 = 0$

$$e = \underbrace{d - a_2 x_2 - \dots - a_n x_n}_{\leq 0} \leq d = e_2$$