$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} F(x) = c^T x = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$$

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad A \text{ taille } (m, n), \quad n > m$$

Matrice de base A_B (m, m) carrée inversible

$$A = (A_B \mid A_H)$$

Variables de base x_B

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_H \end{pmatrix}$$

$$\boxed{Ax = b} \iff A_B x_B + A_H x_H = b$$

$$\iff \boxed{x_B = A_B^{-1}(b - A_H x_H)}$$

Solution de base : $Ax = b$, $x_H = 0$

$\Rightarrow$ $x_B = A_B^{-1} b$ ↑ variables hors-base

- Solution de base réalisable : ⊕ $x \geq 0$

  = sommet du polyèdre des contraintes

- Optimum est toujours atteint en (au moins) un sommet i.e. une solution de base réalisable

Méthode du simplexe

$$\max F(x_1, x_2) = 6x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 + e_1 = 81 \\ 4x_1 + 5x_2 + e_2 = 55 \\ 2x_1 + x_2 + e_3 = 20 \end{cases}$$

$x_1, x_2 \geq 0 \quad e_1, e_2, e_3 \geq 0$

Solution de base réalisable :

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ inversible}$$

$$A_H = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x_B = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 81 \\ 55 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$x_H = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$F = 0$

- Variable entrante : une variable hors-base (=0)
qui va rentrer en base (>0 après)

pour faire augmenter le + possible le F.

⇝ On exprime F en fonction des variables hors-base x_H

$$F = 6x_1 + 4x_2$$

↑ coefficient > 0 le plus grand

⇝ on choisit x_1 comme variable entrante

$$\boxed{x_e = x_1}$$

Variable sortante : une variable de base doit s'annuler pour devenir hors-base

$e_1 = 81 - 3x_1 - 9x_2$ s'annule pour $x_1 = \frac{81}{3}$

$e_2 = 55 - 4x_1 - 5x_2$ ——— $x_1 = 55/4$

$e_3 = 20 - 2x_1 - x_2$ ——— $x_1 = 20/2 = 10$ ←

e_3 est la 1ère variable à s'annuler quand x_1 ↗

⇝ variable sortante $x_s = e_3 = 0$

et $x_1 = 10$

Nouvelle solution de base réalisable

$$x_B = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix} ; x_H = \begin{pmatrix} e_3 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$F = 60$

2ème étape On exprime "tout" (x_B et F) en fonction de x_H (dictionnaire)

$$\begin{cases} x_1 = 10 - \frac{1}{2} e_3 - \frac{1}{2} x_2 \\ e_1 = 81 - 3\left(10 - \frac{1}{2} e_3 - \frac{1}{2} x_2\right) - 9 x_2 \\ e_2 = 55 - 4\left(10 - \frac{1}{2} e_3 - \frac{1}{2} x_2\right) - 5 x_2 \\ F = 6\left(10 - \frac{1}{2} e_3 - \frac{1}{2} x_2\right) + 4 x_2 \end{cases}$$

s'annule pour $x_2 = 20$

$$\begin{cases} x_1 = 10 - \frac{1}{2} e_3 - \frac{1}{2} x_2 \\ e_1 = 51 + \frac{3}{2} e_3 - \frac{15}{2} x_2 \\ e_2 = 15 + 2 e_3 - 3 x_2 \\ F = 60 - 3 e_3 + x_2 \end{cases}$$

(dictionnaire)

variable entrante.

3ème étape

$$\begin{cases} x_2 = 5 - \frac{1}{3} e_2 + \frac{2}{3} e_3 \\ x_1 = \frac{15}{2} + \frac{1}{6} e_2 - \frac{5}{6} e_3 \\ e_1 = \frac{27}{2} + \frac{5}{2} e_2 - \frac{7}{2} e_3 \\ F = 65 - \frac{1}{3} e_2 - \frac{7}{3} e_3 . \end{cases}$$

Coûts réduits $L_{it} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -7/3 \end{pmatrix} < 0$

⇒ solution maximale atteint.

$$x_B^* = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ e_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 15/2 \\ 27/2 \end{pmatrix} \quad ; \quad x_{it}^* = \begin{pmatrix} e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$