Master TET, ENPC 2024-25
Recherche Opérationnelle

TD3 : Optimisation linéaire en nombres entiers

Exercice 1. *Application du Théorème des écarts complémentaires*

On considère le programme linéaire (P) suivant

$$\max F(\mathbf{x}) = 4x_1 + 5x_2$$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 + 4x_2 \leq 1 \\ x_1,\, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

A partir du théorème des écarts complémentaires, montrer que $\mathbf{x} = (\frac{3}{11}, \frac{2}{11})$ est solution optimale de (P).

Exercice 2. *Programmation linéaire en variables* $\{0, 1\}$ – *Problème de sac à dos.*

Soit le problème de "sac-à-dos" suivant :

$$\max\left[F(\mathbf{x}) = 6x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 4x_4\right]$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 4x_4 \leq 8 \\ 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 7 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{cases}$$

Résoudre ce problème par une procédure de Branch-and-Bound.

Exercice 3. *Méthode des coupes entières.*

On considère le programme linéaire en nombres entiers suivant

$$(P) \quad \begin{cases} \max\limits_{\mathbf{x}=(x_1,x_2)} \left[F(x) = x_1 + 10x_2\right] \\ A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \\ x_1,\, x_2 \text{ entiers} \end{cases} \qquad \text{avec } A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 18 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 93 \\ 78 \end{pmatrix}.$$

Utiliser une procédure de séparation avec des coupes entières (Branch-and-Cut) pour résoudre (P).

Rappel de la méthode :

1. On commence par résoudre le problème (P_0) qui est le problème (P) relaxé i.e. sans la contrainte "x_1 et x_2 entiers".
2. On examine si la solution optimale (x_1^*, x_2^*) de (P_0) est entière.
   (a) Si c'est le cas alors on arrête.
   (b) Sinon, on considère la *première* variable optimale non entière x_i^* $(i = 1$ ou $2)$ et on construit deux autres problèmes (P_1) et (P_2) en rajoutant à (P_0) respectivement les contraintes
   $$x_i \leq \lfloor x_i^* \rfloor \text{ pour } (P_1), \quad x_i \geq \lfloor x_i^* \rfloor + 1 \text{ pour } (P_2) \tag{1}$$
   où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière inférieure.
   (c) On résout les problèmes *auxiliaires* (P_1) et (P_2).

(d) On sélectionne le problème (P_1) ou (P_2) réalisable qui possède le coût F le plus grand et on retourne en 2) avec ce problème à la place de (P_0).

On associe à cette méthode une procédure de type Branch-and-Bound. La phase de séparation (branch) correspond à la construction des deux problèmes (P_1) et (P_2). La phase d'évaluation (bound) correspond à la détermination d'une valeur $\overline{F}$ du coût pour une solution réalisable **entière** particulière. Initialement, on prend $\overline{F} = +\infty$ et on actualise $\overline{F}$ quand une solution optimale *entière* d'un problème auxiliaire est obtenue. La valeur $\overline{F}$ permet de déterminer si on arrête d'examiner un sommet de l'arbre.

Vous utiliserez les indications ci-dessous qui fournissent les solutions optimales des programmes linéaires (sans contrainte d'intégrité sur les variables) de la forme

$$(PL) \quad \begin{cases} \max\limits_{\mathbf{x}} \left[F(\mathbf{x}) = x_1 + 10x_2\right] \\ \quad A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \\ \quad C\mathbf{x} \leq \mathbf{d}, \\ \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

où des contraintes supplémentaires (les coupes entières) ont été rajoutées avec la matrice C et le vecteur $\mathbf{d}$. Les indications sont données pour certaines valeurs de C et $\mathbf{d}$.

Indications :

1. La solution optimale de (P) relaxé (i.e. sans contrainte d'intégrité sur les variables) est donnée par $x_1^* = 3/2,\ x_2^* = 5$ et $F^*_{\max} = 51,5$.
2. Avec $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{d} = 1$, la solution optimale de (PL) est $x_1^* = 1,\ x_2^* = 4$ et $F^*_{\max} = 41$.
3. Avec $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{d} = -2$, la solution optimale de (PL) est $x_1^* = 2,\ x_2^* = 89/18 \simeq 4,944$ et $F^*_{\max} = 463/9 \simeq 51,444$.
4. Avec $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, la solution optimale de (PL) est $x_1^* = 10,5,\ x_2^* = 4$ et $F^*_{\max} = 50,5$.
5. Avec $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}$, le (PL) n'a pas de solution réalisable.
6. Avec $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$, la solution optimale de (PL) est $x_1^* = 10,\ x_2^* = 4$ et $F^*_{\max} = 50$.
7. Avec $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -11 \end{pmatrix}$, la solution optimale de (PL) est $x_1^* = 11,\ x_2^* \simeq 3,944$ et $F^*_{\max} = 50,444$.
8. Avec $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -11 \\ 3 \end{pmatrix}$, la solution optimale de (PL) est $x_1^* = 12,5\,,\ x_2^* = 3$ et $F^*_{\max} = 42,5$.
9. Avec $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -11 \\ -4 \end{pmatrix}$, le (PL) n' a pas de solution réalisable.