Chapitre 1 : Programmation linéaire

J.-F. Scheid

v2.1

1) Modélisation

En Recherche Opérationnelle (RO), modéliser un problème consiste à identifier:

- les **variables** intrinsèques (inconnues)
- les différentes **contraintes** auquelles sont soumises ces variables
- l'**objectif** visé (optimisation).

Dans un problème de programmation linéaire **(PL)** les contraintes et l'objectif sont des fonctions **linéaires** des variables. On parle aussi de *programme linéaire*.

Exemple d'un problème de production.

Une usine fabrique 2 produits P_1 et P_2 nécessitant des ressources d'équipement, de main d'oeuvre et de matières premières disponibles en quantité limitée.

	P_1	P_2	disponibilité
équipement	3	9	81
main d'œuvre	4	5	55
matière première	2	1	20

P_1 et P_2 rapportent à la vente 6 euros et 4 euros par unité.

Exemple d'un problème de production.

Une usine fabrique 2 produits P_1 et P_2 nécessitant des ressources d'équipement, de main d'oeuvre et de matières premières disponibles en quantité limitée.

	P_1	P_2	disponibilité
équipement	3	9	81
main d'œuvre	4	5	55
matière première	2	1	20

P_1 et P_2 rapportent à la vente 6 euros et 4 euros par unité.

Quelles quantités (non entières) de produits P_1 et P_2 doit produire l'usine pour maximiser le bénéfice total venant de la vente des 2 produits ?

- *Variables* : x_1 et x_2 sont les quantités des produits P_1 et P_2 fabriqués ($x_1, x_2 \in \mathbb{R}$).

- *Variables* : x_1 et x_2 sont les quantités des produits P_1 et P_2 fabriqués ($x_1, x_2 \in \mathbb{R}$).

- *Fonction objectif à maximiser* : La fonction objectif F correspond au bénéfice total : $F(x_1, x_2) = 6x_1 + 4x_2$. On cherche donc

$$\max_{(x_1,x_2)} \left[F(x_1, x_2) = 6x_1 + 4x_2\right].$$

- *Variables* : x_1 et x_2 sont les quantités des produits P_1 et P_2 fabriqués ($x_1, x_2 \in \mathbb{R}$).
- *Fonction objectif à maximiser* : La fonction objectif F correspond au bénéfice total : $F(x_1, x_2) = 6x_1 + 4x_2$. On cherche donc

$$\max_{(x_1,x_2)} \left[F(x_1, x_2) = 6x_1 + 4x_2\right].$$

- *Contraintes* :
  - Disponibilité de chacune des ressources :

$$\begin{aligned} 3x_1 + 9x_2 &\leq 81 \\ 4x_1 + 5x_2 &\leq 55 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 20 \end{aligned}$$

  - Positivité des variables: $x_1, x_2 \geq 0$.

En résumé, le problème de production se modélise sous la forme d'un *programme linéaire* :

$$\max_{(x_1,x_2)} \left[F(x_1,x_2) = 6x_1 + 4x_2 \right].$$

sous les contraintes:

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x_1 + 9x_2 \leq 81 \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 55 \\ 2x_1 + x_2 \leq 20 \end{array} \right.$$

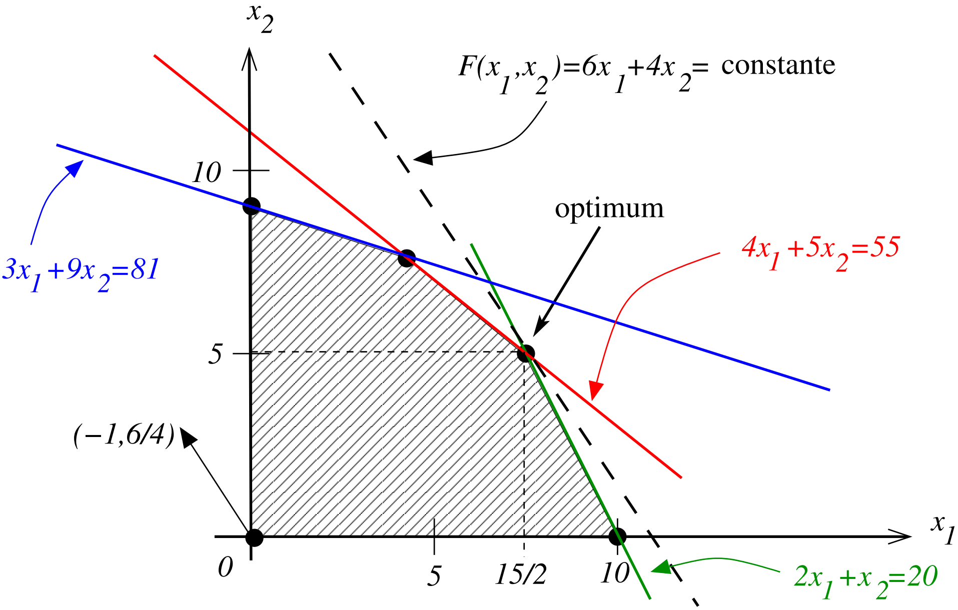
$$x_1, x_2 \geq 0$$

2) Résolution graphique (PL à 2 variables)

Les contraintes où apparaissent des inégalités correspondent géométriquement à des **demi-plans**.

Intersection de ces demi-plans = ensemble des variables satisfaisant à toutes les contraintes.

L'ensemble des contraintes est un **polygône convexe**.



x_2
$F(x_1,x_2)=6x_1+4x_2=$ constante
10
optimum
$3x_1+9x_2=81$
$4x_1+5x_2=55$
5
$(-1,6/4)$
x_1
0
5
15/2
10
$2x_1+x_2=20$

Détermination du maximum de F

Fonction objectif $F(x_1, x_2) = 6x_1 + 4x_2 \Rightarrow$ droite de coefficient directeur $(-1, 6/4)$.

Pour déterminer $\max F$, on fait "glisser" la droite (translation parallèle à la direction de la droite) du haut vers le bas jusqu'à rencontrer l'ensemble des variables satisfaisant les contraintes $\Rightarrow$ *solution optimale* $(x_1, x_2) = (15/2, 5)$ avec $\max(F) = 65$.

On remarque que le maximum de F est atteint en **un sommet** du **polygône convexe** des contraintes.

II. Formes générales d'un programme linéaire

1) Forme canonique mixte

$$\max_{(x_1,\cdots,x_n)} \left[F(x_1,...,x_n) = c_1x_1 + \cdots c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \right].$$

- contraintes inégalités : $\forall i \in I_1,\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i$
- contraintes égalités : $\forall i \in I_2,\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$
- contraintes de signes : $\forall j \in J_1,\ x_j \geq 0$
- $\forall j \in J_2,\ x_j$ de signe quelconque.

$I = I_1 \cup I_2$: ens. des indices de contraintes, $\mathrm{card}(I) = m \Rightarrow$ ***m* contraintes**

$J = J_1 \cup J_2$: ens. des indices des variables, $\mathrm{card}(J) = n \Rightarrow$ ***n* variables**

Notations

Vecteurs :

$$\begin{aligned}
&\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n \quad (\text{les inconnues}) \\
&\mathbf{c} = (c_1, \cdots, c_n)^\top \in \mathbb{R}^n, \\
&\mathbf{b} = (b_1, \cdots, b_m)^\top \in \mathbb{R}^m
\end{aligned}$$

Matrice A de taille $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

2) Forme canonique pure

Sous cette forme, pas de contraintes d'égalité $I_2 = \emptyset$ et $J_2 = \emptyset$.

Un programme linéaire (PL) est dit sous forme *canonique pure* s'il s'écrit:

$$\boxed{\begin{array}{l} \max\limits_{\mathbf{x}} \left[F(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^\top \mathbf{x} = c_1 x_1 + \cdots c_n x_n \right] \\ \text{sous les contraintes :} \\ \qquad \left\{ \begin{array}{l} A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \right. \end{array}}$$

3) Forme standard

Sous cette forme, $I_1 = \emptyset$ et $J_2 = \emptyset$.

Un programme linéaire (PL) est dit sous forme *standard* s'il s'écrit:

$$\boxed{\begin{array}{l} \max\limits_{\mathbf{x}} \left[F(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^\top \mathbf{x}\right] \\ \text{sous les contraintes :} \\ \quad \left\{ \begin{array}{l} A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \right. \end{array}}$$

3) Forme standard

Sous cette forme, $I_1 = \emptyset$ et $J_2 = \emptyset$.

Un programme linéaire (PL) est dit sous forme *standard* s'il s'écrit:

$$\boxed{\begin{array}{l} \max\limits_{\mathbf{x}} \left[F(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \right] \\ \text{sous les contraintes :} \\ \qquad \left\{ \begin{array}{l} A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \right. \end{array}}$$

On dit de plus que le PL est sous forme standard *simpliciale* si A de taille $m \times n$ avec $m \leq n$, se décompose en:

$$A = \Big(I_m \mid H \Big)$$

- I_m matrice identité de taille $m \times m$
- H matrice de taille $m \times (n - m)$

Remarque sur la positivité des variables.

Sous forme canonique pure ou standard, on impose toujours la positivité des variables $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$. En fait, on peut toujours se ramener au cas $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$:

Remarque sur la positivité des variables.

Sous forme canonique pure ou standard, on impose toujours la positivité des variables $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$. En fait, on peut toujours se ramener au cas $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$:

- Si la variable x a une borne inférieure non nulle $x \geq l$, il suffit de considérer la nouvelle variable $y = x - l$ à la place de la variable x et alors on a $y \geq 0$.

Remarque sur la positivité des variables.

Sous forme canonique pure ou standard, on impose toujours la positivité des variables $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$. En fait, on peut toujours se ramener au cas $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$:

- Si la variable x a une borne inférieure non nulle $x \geq l$, il suffit de considérer la nouvelle variable $y = x - l$ à la place de la variable x et alors on a $y \geq 0$.
- S'il n'y a pas de borne inférieure sur x (variable libre), on peut toujours poser $x = y - z$ avec les nouvelles variables $y \geq 0$, $z \geq 0$.

4) Variables d'écarts

Proposition

Tout PL sous forme standard <u>s'écrit</u> de façon équivalente en un PL sous forme canonique pure et inversement.

4) Variables d'écarts

Proposition

Tout PL sous forme standard s'écrit de façon équivalente en un PL sous forme canonique pure et inversement.

Démonstration. *i)* Soit un PL sous forme canonique pure. On a

$$A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad A\mathbf{x} + \mathbf{e} = \mathbf{b}, \ \mathbf{e} \geq \mathbf{0}$$

où $\mathbf{e} = (e_1, \cdots, e_m)^\top$ sont appelées *variables d'écart*.

$$\text{Ainsi,} \quad \left\{ \begin{array}{l} A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} A \mid I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{pmatrix} = \mathbf{b} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{pmatrix} \geq \mathbf{0} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \tilde{A}\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{b} \\ \tilde{\mathbf{x}} \geq \mathbf{0} \end{array} \right.$$

avec $\tilde{A} = \begin{pmatrix} A \mid I_m \end{pmatrix}$ matrice de taille $m \times (n + m)$.

ii) (Réciproque) Soit un PL sous forme standard. On a

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \begin{cases} A\mathbf{x} \le \mathbf{b} \\ A\mathbf{x} \ge \mathbf{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A\mathbf{x} \le \mathbf{b} \\ -A\mathbf{x} \le -\mathbf{b} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{A}{-A}\right)\mathbf{x} \le \left(\frac{\mathbf{b}}{-\mathbf{b}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \tilde{\tilde{A}}\mathbf{x} \le \tilde{\mathbf{b}}$$

où $\tilde{\tilde{A}}$ est une matrice de taille $2m \times n$ et $\tilde{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^{2m}$. $\square$

Exemple. Problème de production de l'introduction.
PL sous forme standard. On introduit 3 variables d'écarts e_1, e_2, e_3.

$$\max_{(x_1,x_2,e_1,e_2,e_3)} \left[F(x_1,x_2) = 6x_1 + 4x_2\right].$$

sous les contraintes:

$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 + e_1 = 81 \\ 4x_1 + 5x_2 + e_2 = 55 \\ 2x_1 + x_2 + e_3 = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1, x_2 \geq 0 \\ e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

Les inconnues sont désormais x_1, x_2, e_1, e_2, e_3.

III. Solutions de base réalisables

PL sous *forme standard* ($A\mathbf{x} = \mathbf{b}$).

Hypothèse de rang plein

On suppose que la matrice A est de taille $m \times n$ avec $\boxed{\mathrm{rang}(A) = m \leq n}$.

Rappel : $\mathrm{rang}(A) =$ nombre maximal de lignes de A linéairement indépendantes (=nombre max. de colonnes linéairement indépendantes).

III. Solutions de base réalisables

PL sous *forme standard* ($A\mathbf{x} = \mathbf{b}$).

Hypothèse de rang plein

On suppose que la matrice A est de taille $m \times n$ avec $\boxed{\text{rang}(A) = m \leq n}$.

Rappel : $\text{rang}(A) =$ nombre maximal de lignes de A linéairement indépendantes (=nombre max. de colonnes linéairement indépendantes).

Remarques : Sous l'hypothèse de rang plein :

- le système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ admet toujours des solutions.
- si $m < n$, le système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ admet une infinité de solution.
- si $m = n$, la solution est unique et vaut $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$, dans ce cas, il n'y a rien à maximiser...
- Hypothèse non restrictive : si $\text{rang}(A) < m$ le système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ n'a pas de solution *en général*. Si $\text{rang}(A) < m$ et $\mathbf{b} \in \text{Im}(A)$, il y a des équations redondantes qu'on peut supprimer.

Quelques définitions...

Définition (solution réalisable)

On appelle solution réalisable tout vecteur $\mathbf{x}$ qui satisfait les contraintes du PL i.e. tel que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ et $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.

Quelques définitions...

Définition (solution réalisable)

On appelle solution réalisable tout vecteur $\mathbf{x}$ qui satisfait les contraintes du PL i.e. tel que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ et $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.

Définition (variables de base)

Soit $B \subset \{1, \cdots, n\}$ un ensemble d'indices avec $\mathrm{card}(B) = m$ tel que les colonnes A^j, $j \in B$, de A sont linéairement indépendantes. Autrement dit, la matrice carrée A_B formée des colonnes A^j, $j \in B$, est inversible. On dit que l'ensemble B des indices est une base.

- Les variables $\mathbf{x}_B = (x_j,\ j \in B)$ sont appelées variables de base.
- Les variables $\mathbf{x}_H = (x_j,\ j \notin B)$ sont appelées variables hors-base.

Remarques.

- Sous l'hypothèse de rang plein, il existe toujours une base non vide.
- Quitte à renuméroter les indices, on peut toujours écrire les décompositions par blocs :

$$A = (A_B |\ A_H) \text{ où } A_H \text{ est la matrice formée des colonnes } A^j,\ j \notin B$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_H \end{pmatrix}.$$

Le système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ est équivalent à

$$A_B \mathbf{x}_B + A_H \mathbf{x}_H = \mathbf{b}.$$

$\Rightarrow$ on peut fixer les variables hors-base et les variables de base sont alors complètement déterminées (la matrice A_B est inversible)

Définition (solution de base)

On dit que $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_H \end{pmatrix}$ est solution de base associée à la base B si $\mathbf{x}_H = \mathbf{0}$.

Définition (solution de base)

On dit que $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_H \end{pmatrix}$ est solution de base associée à la base B si $\mathbf{x}_H = \mathbf{0}$.

Propriétés des solutions de base réalisables

Si $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_H \end{pmatrix}$ est une solution de base réalisable alors $\mathbf{x}_H = \mathbf{0}$ et $\mathbf{x}_B = A_B^{-1}\mathbf{b}$.

Remarque. Il y a *au plus* C_n^m solutions de base (toutes ne sont pas réalisables).

Exemple. Problème de production de l'introduction.
Sous forme standard, le PL s'écrit

$$\max_{(x_1,x_2)} \left[F(x_1,x_2) = 6x_1 + 4x_2\right].$$

sous les contraintes:

$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 + e_1 = 81 \\ 4x_1 + 5x_2 + e_2 = 55 \\ 2x_1 + x_2 + e_3 = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1, x_2 \geq 0 \\ e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

On a $m = 3$, $n = 5$, $\mathrm{rang}(A) = m = 3$. **Une base** est donnée par $B = \{3,4,5\}$ avec $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **La solution de base réalisable** correspondante est $\mathbf{x} = (x_1, x_2, e_1, e_2, e_3)^\top = (\underbrace{0,0}_{\mathbf{x}_H}, \underbrace{81, 55, 20}_{\mathbf{x}_B = A_B^{-1}\mathbf{b}})^\top$.

IV. Propriétés géométriques des solutions de base réalisables

On note

$$\mathcal{D}_R = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\},$$

l'ensemble des solutions réalisables d'un PL sous forme standard.

Définitions (rappels)

- Un *polyèdre* Q de $\mathbb{R}^n$ est défini par $Q = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathcal{M}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$ où $\mathcal{M}$ est une matrice $m \times n$.
- Un ensemble E est dit *convexe* si $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$, $\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} \in E$ pour tout $0 \leq \lambda \leq 1$.

IV. Propriétés géométriques des solutions de base réalisables

On note

$$\mathcal{D}_R = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\},$$

l'ensemble des solutions réalisables d'un PL sous forme standard.

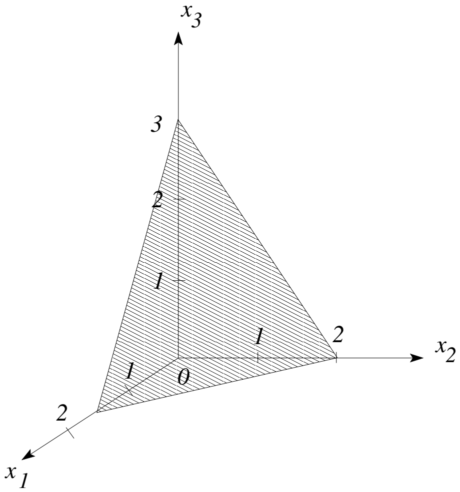
Définitions (rappels)

- Un *polyèdre* Q de $\mathbb{R}^n$ est défini par $Q = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathcal{M}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$ où $\mathcal{M}$ est une matrice $m \times n$.
- Un ensemble E est dit *convexe* si $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$, $\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} \in E$ pour tout $0 \leq \lambda \leq 1$.

Proposition

L'ensemble $\mathcal{D}_R$ des solutions réalisables est un polyèdre convexe, fermé.

Exemple. $\mathcal{D}_R = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + \frac{3}{2}x_2 + x_3 = 3,\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \right\}$



Caractérisation de l'optimum

Définition (sommet)

Un point $\mathbf{x} \in \mathcal{D}_R$ est un sommet (ou point extrême) si et seulement s'il n'existe pas $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{D}_R$, $\mathbf{y} \neq \mathbf{z}$ tels que $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y} + (1 - \lambda)\mathbf{z}$ avec $0 < \lambda < 1$.

Caractérisation de l'optimum

Définition (sommet)

Un point $\mathbf{x} \in \mathcal{D}_R$ est un <u>sommet</u> (ou point extrême) si et seulement s'il n'existe pas $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{D}_R$, $\mathbf{y} \neq \mathbf{z}$ tels que $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y} + (1 - \lambda)\mathbf{z}$ avec $0 < \lambda < 1$.

Théorème

- $\mathbf{x}$ est une solution de base réalisable si et seulement si $\mathbf{x}$ est un sommet de $\mathcal{D}_R$.
- L'optimum de la fonction objectif F sur $\mathcal{D}_R$, s'il existe, est atteint en au moins un sommet de $\mathcal{D}_R$.

Tout se passe donc avec les solutions de base : pour résoudre un PL sous forme standard, **il suffit de se restreindre aux solutions de base réalisables** (les sommets de $\mathcal{D}_R$).

3 situations possibles :

1. $\mathcal{D}_R = \emptyset$: le PL n'a pas de solution.
2. $\mathcal{D}_R \neq \emptyset$ mais la fonction objectif F n'est pas majorée sur $\mathcal{D}_R$: le maximum de F vaut $+\infty$ (cas exclu si $\mathcal{D}_R$ est borné).
3. $\mathcal{D}_R \neq \emptyset$ et la fonction objectif F est majorée sur $\mathcal{D}_R$: le PL admet une solution optimale (non nécessairement unique).

3 situations possibles :

1. $\mathcal{D}_R = \emptyset$: le PL n'a pas de solution.
2. $\mathcal{D}_R \neq \emptyset$ mais la fonction objectif F n'est pas majorée sur $\mathcal{D}_R$: le maximum de F vaut $+\infty$ (cas exclu si $\mathcal{D}_R$ est borné).
3. $\mathcal{D}_R \neq \emptyset$ et la fonction objectif F est majorée sur $\mathcal{D}_R$: le PL admet une solution optimale (non nécessairement unique).

Remarque. Au plus C_n^m solutions de base réalisables. Pour déterminer une solution de base, on doit résoudre $A_B \mathbf{x}_B = \mathbf{b}$. Une méthode directe de type Gauss/LU requière de l'ordre de $\mathcal{O}(m^3)$ opérations.

$\Rightarrow$ *Exploration exhaustive* de toutes les solutions de base (comparaison des coûts correspondants) : $\mathcal{O}(m^3 C_n^m)$ opérations.
Ce nombre est vite très grand avec n et m. Par exemple, avec $n = 20$ et $m = 10$, on a $3 \cdot 10^8$ opérations.

Méthode du simplexe : on explore seulement les sommets qui permettent d'augmenter la fonction objectif $\Rightarrow$ on réduit le nombre de solution de base à explorer.