Chapitre 5 : Flot maximal dans un graphe

J.-F. Scheid

v2.1

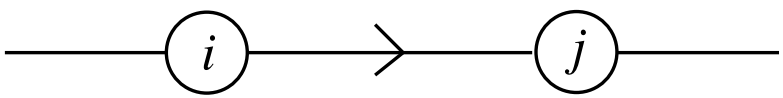
Plan du chapitre

1) Graphe

Graphe $G = (E, \Gamma)$

- E : ensemble fini des **sommets**
- Γ : ensemble fini de couples ordonnés (i, j) avec $i, j \in E$.
  Les éléments de Γ sont appelés les **arêtes** du graphe

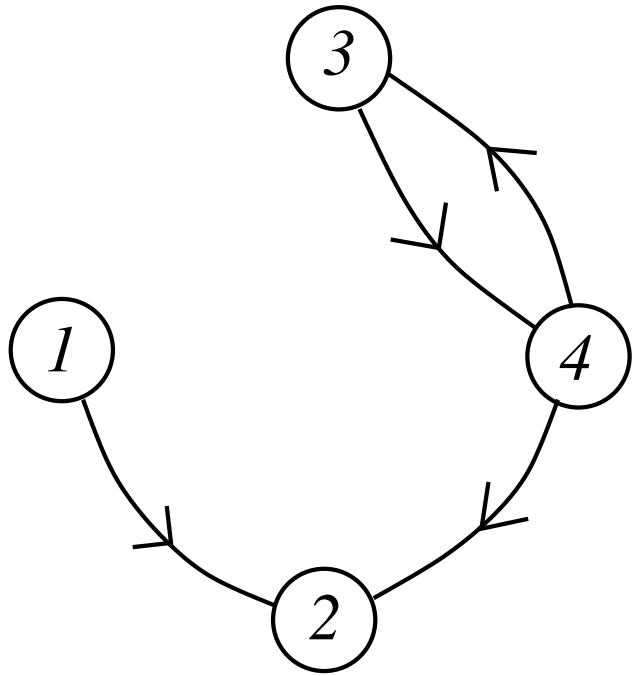
Notation :



Remarque : Les graphes considérés sont tous orientés : les arêtes (i, j) et (j, i) sont distinctes.

Exemple de graphe : $E = \{1, 2, 3, 4\}$

$\Gamma = \{(1, 2), (3, 4), (4, 2), (4, 3)\}$



Exemples de modélisation par des graphes :

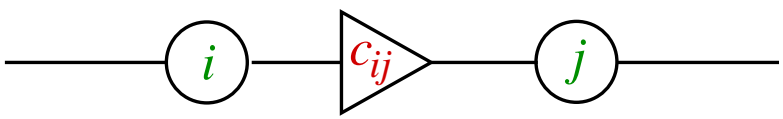
- réseau routier : les sommets sont les intersections des routes, les arêtes représentent les routes.
- cheminement dans un réseau informatique.
- Web modélisé par un graphe. Les sommets sont les pages Web et les arêtes sont les liens hypertexte entre ces différentes pages.

2) Graphe valué

$G = (E, \Gamma, c)$ est un **graphe valué** si (E, Γ) est un graphe auquel on associe une fonction positive $c : \Gamma \to \mathbb{R}^+$ appelée **capacité**.

La capacité de l'arête (i, j) est notée c_{ij}.

Notation :



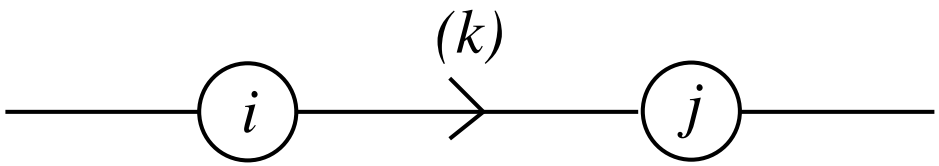
Exemple : La capacité c_{ij} représente par exemple la longueur du tronçon de route (i, j), le nombre max. de voitures par unité de temps entre deux villes i et j, la bande passante maximale entre les serveurs i et j...

3) Représentation d'un graphe

a) Matrice d'incidence sommet-arête

Soit un graphe **sans boucle** c-à-d sans arête (i, i), avec n sommets et m arêtes. On définit A la **matrice d'incidence** de taille $n \times m$:

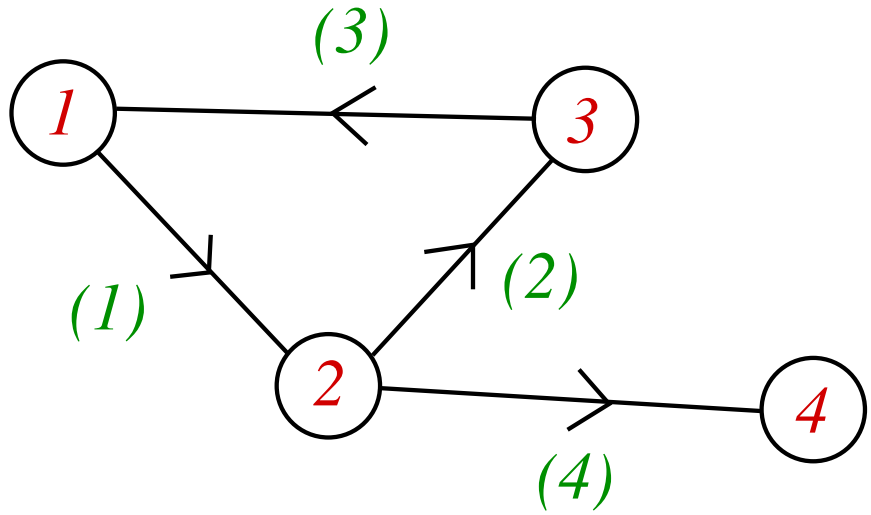
$$a_{ik} = \begin{cases} +1 & \text{si le sommet } i \text{ est l'extrémité } \textbf{initiale} \text{ de l'arête } k \\ -1 & \text{si le sommet } i \text{ est l'extrémité } \textbf{terminale} \text{ de l'arête } k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



$$a_{ik} = +1$$
$$a_{jk} = -1$$

Exemple : $E = \{1, 2, 3, 4\}$

$\Gamma = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (2, 4)\}$



Matrice d'incidence $A =$

	(1,2)	(2,3)	(3,1)	(2,4)
1	+1	0	-1	0
2	-1	+1	0	+1
3	0	-1	+1	0
4	0	0	0	-1

b) Matrice d'adjacence sommet-sommet

Matrice booléenne A de taille $n \times n$ (n sommets)

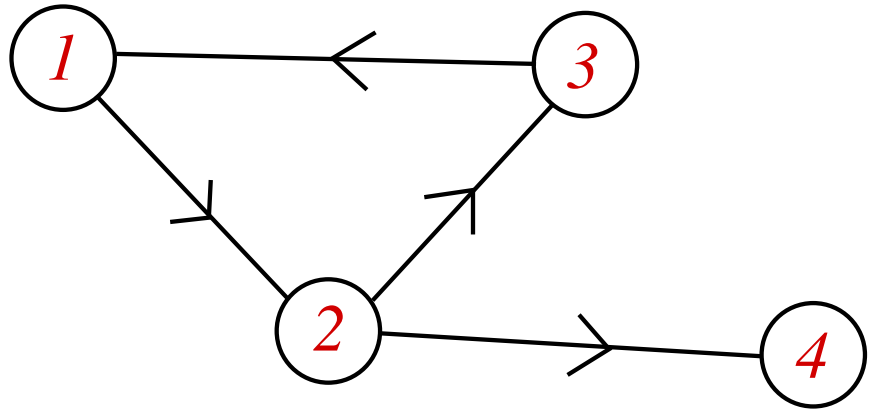
$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si l'arête } (i,j) \text{ existe dans le graphe} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Variante pour un graphe valué par $\{c_{ij}\}$:

$$a_{ij} = \begin{cases} c_{ij} & \text{si l'arête } (i,j) \text{ existe dans le graphe} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple : $E = \{1, 2, 3, 4\}$

$\Gamma = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (2, 4)\}$



Matrice d'adjacence $A =$

	1	2	3	4
1	0	1	0	0
2	0	0	1	1
3	1	0	0	0
4	0	0	0	0

c) Listes d'adjacence : successeurs et prédécesseurs

Pour chaque sommet i du graphe, on définit

- la liste de ses **successeurs** $S(i)$: liste des sommets j tq l'arête (i, j) existe dans le graphe.
- la liste de ses **prédécesseurs** $P(i)$: liste des sommets j tq l'arête (j, i) existe dans le graphe.

c) Listes d'adjacence : successeurs et prédécesseurs

Pour chaque sommet i du graphe, on définit

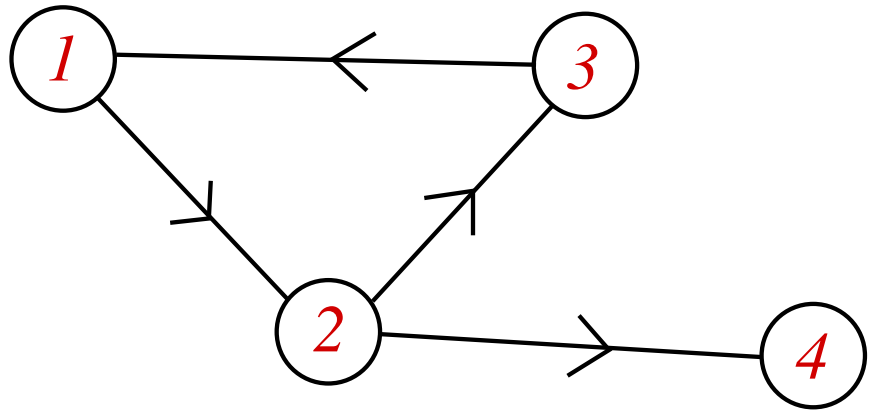
- la liste de ses **successeurs** $S(i)$: liste des sommets j tq l'arête (i, j) existe dans le graphe.
- la liste de ses **prédécesseurs** $P(i)$: liste des sommets j tq l'arête (j, i) existe dans le graphe.

Un sommet sans prédécesseur est appelé une **source**.

Un sommet sans successeur est appelé un **puits**

Exemple : $E = \{1, 2, 3, 4\}$

$\Gamma = \{(1, 2),\ (2, 3),\ (3, 1),\ (2, 4)\}$



sommet	successeur S	prédécesseur P
1	2	3
2	3, 4	1
3	1	2
4	–	2

4) Flot dans un graphe

Problèmes de circulation d'objets (voiture, information ...) dans un réseau (routier, informatique ...).

Définition

Soit $G = (E, \Gamma, c)$ un graphe valué comportant un seul sommet source s et un seul sommet puits t.

- Un **flot** de s à t est une fonction $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ tq

$$\sum_{i \in P(j)} f_{ij} = \sum_{k \in S(j)} f_{jk} \quad \text{où} \quad f_{ij} \overset{def}{=} f(i,j)$$

pour tout sommet $j \neq s, t$. On dit qu'il y a conservation du flux au sommet j ("ce qui rentre égale ce qui sort").

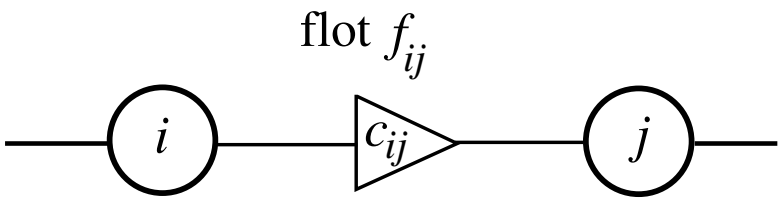
La valeur $f_{ij} \overset{def}{=} f(i,j)$ est le **flot dans l'arête** (i,j).

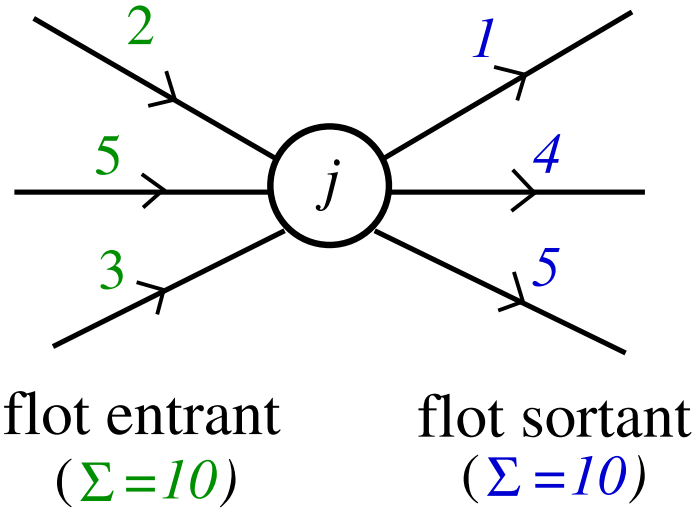
Définition (suite)

- Le flot est dit **réalisable** si pour toute arête $(i, j) \in \Gamma$, on a

$$0 \leq f_{ij} \leq c_{ij}$$

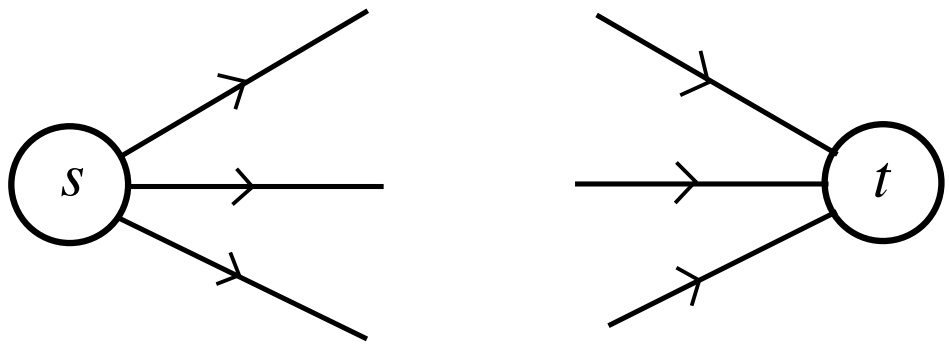
- La quantité $v = \sum_{i \in P(t)} f_{it}$ est la **valeur du flot** de s à t.





Remarque (rappels) :

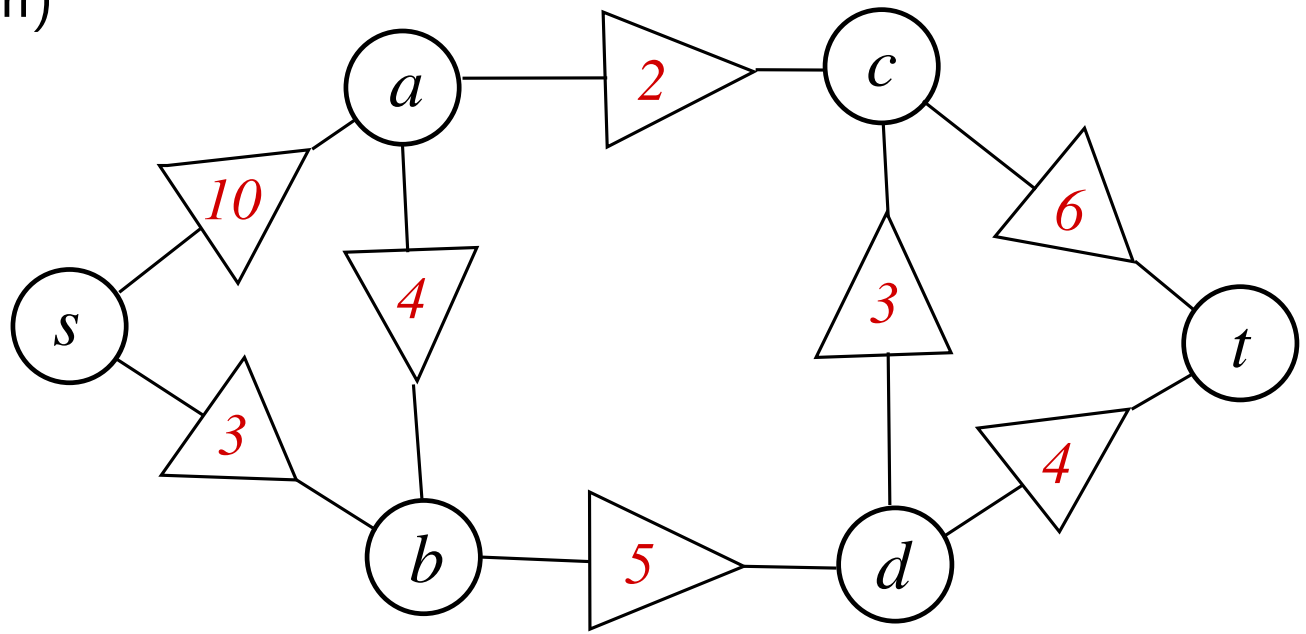
- $S(i)$: ensemble des sommets j **successeurs** du sommet i c-à-d tq l'arête (i, j) existe dans le graphe.
- $P(i)$: ensemble des sommets j **prédécesseurs** du sommet i c-à-d tq l'arête (j, i) existe dans le graphe.
- Une **source** s (resp. un **puits** t) est un sommet ne possédant pas de prédécesseur (resp. de successeur).



II. Problème de flot maximal dans un graphe

1) Introduction

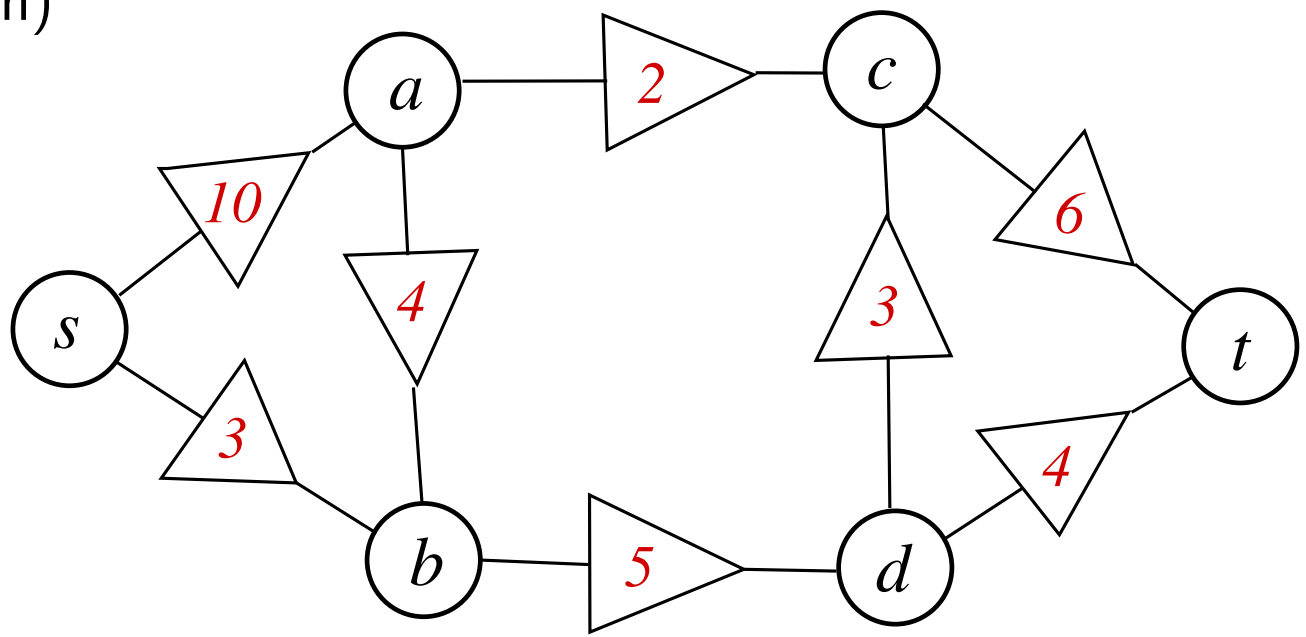
On veut par ex. trouver le trafic maximal entre deux villes d'un réseau routier dont on connait la capacité (nb de voiture par heure sur chaque tronçon)



II. Problème de flot maximal dans un graphe

1) Introduction

On veut par ex. trouver le trafic maximal entre deux villes d'un réseau routier dont on connait la capacité (nb de voiture par heure sur chaque tronçon)



Problème de flot maximal

Etant donné un graphe valué possédant une seule source et un seul puits , trouver un flot réalisable maximal (i.e. dont la valeur est maximale).

Flot maximal et programmation linéaire

$$\max_{f_{ij},v} [F = v]$$

Flot maximal et programmation linéaire

conservation des flux en chaque sommet :

$$\max_{f_{ij},v} [F = v]$$

$$\begin{cases} \sum_{k \in S(s)} f_{sk} - v = 0 \quad (\text{source } s) \\ -\sum_{i \in P(j)} f_{ij} + \sum_{k \in S(j)} f_{jk} = 0, \quad \forall j \neq s, t \\ -\sum_{i \in P(t)} f_{it} + v = 0 \quad (\text{puits } t) \end{cases}$$

Flot maximal et programmation linéaire

$$\max_{f_{ij},v} [F = v]$$

conservation des flux en chaque sommet :

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k \in S(s)} f_{sk} - v = 0 \quad (\text{source } s) \\ \displaystyle -\sum_{i \in P(j)} f_{ij} + \sum_{k \in S(j)} f_{jk} = 0, \quad \forall j \neq s, t \\ \displaystyle -\sum_{i \in P(t)} f_{it} + v = 0 \quad (\text{puits } t) \end{cases}$$

respect des capacités : $f_{ij} \leq c_{ij}$ pour toute arête $(i, j) \in \Gamma$

Flot maximal et programmation linéaire

$$\max_{f_{ij},v} [F = v]$$

conservation des flux en chaque sommet :

$$\begin{cases} \sum_{k \in S(s)} f_{sk} - v = 0 \quad \text{(source } s\text{)} \\ -\sum_{i \in P(j)} f_{ij} + \sum_{k \in S(j)} f_{jk} = 0, \quad \forall j \neq s, t \\ -\sum_{i \in P(t)} f_{it} + v = 0 \quad \text{(puits } t\text{)} \end{cases}$$

respect des capacités : $f_{ij} \leq c_{ij}$ pour toute arête $(i,j) \in \Gamma$

contrainte de signe : $f_{ij} \geq 0$ pour toute arête $(i,j) \in \Gamma$

Remarque : les inconnues sont les f_{ij} et la valeur v du flot.

Flot maximal et programmation linéaire

$$\max_{f_{ij},v} [F = v]$$

conservation des flux en chaque sommet :

$$\begin{cases} \sum_{k \in S(s)} f_{sk} - v = 0 \quad \text{(source } s\text{)} \\ -\sum_{i \in P(j)} f_{ij} + \sum_{k \in S(j)} f_{jk} = 0, \quad \forall j \neq s, t \\ -\sum_{i \in P(t)} f_{it} + v = 0 \quad \text{(puits } t\text{)} \end{cases}$$

respect des capacités : $f_{ij} \leq c_{ij}$ pour toute arête $(i,j) \in \Gamma$

contrainte de signe : $f_{ij} \geq 0$ pour toute arête $(i,j) \in \Gamma$

Remarque : les inconnues sont les f_{ij} et la valeur v du flot.

Flot maximal et programmation linéaire

Ecriture matricielle (n sommets et m arêtes)

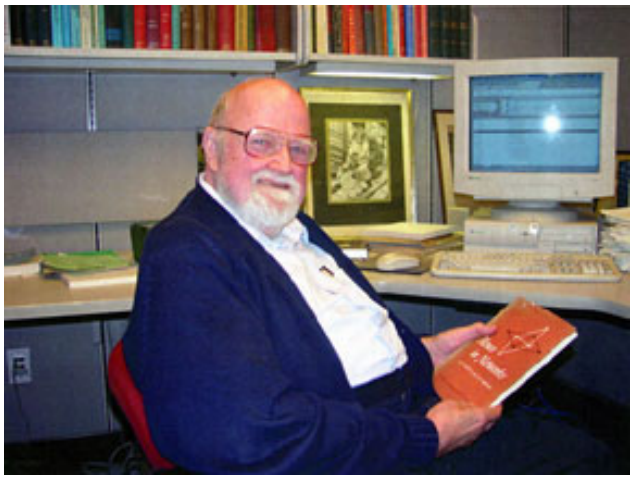
$$\max_{\mathbf{f},v} [F = v]$$

$$\begin{cases} A\mathbf{f} + \mathbf{v} = 0 \\ \mathbf{f} \leq \mathbf{c} \\ \mathbf{f} \geq 0 \end{cases}$$

A est la matrice d'incidence du graphe, de taille $n \times m$,

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} (f_{sk})_{k \in S(s)} \\ \vdots \\ f_{ij} \\ \vdots \\ (f_{it})_{i \in P(t)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m; \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -v \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ +v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

2) Théorème de Ford-Fulkerson



L. R. Ford (1927– 2017)

D. R. Fulkerson (1924–1976)

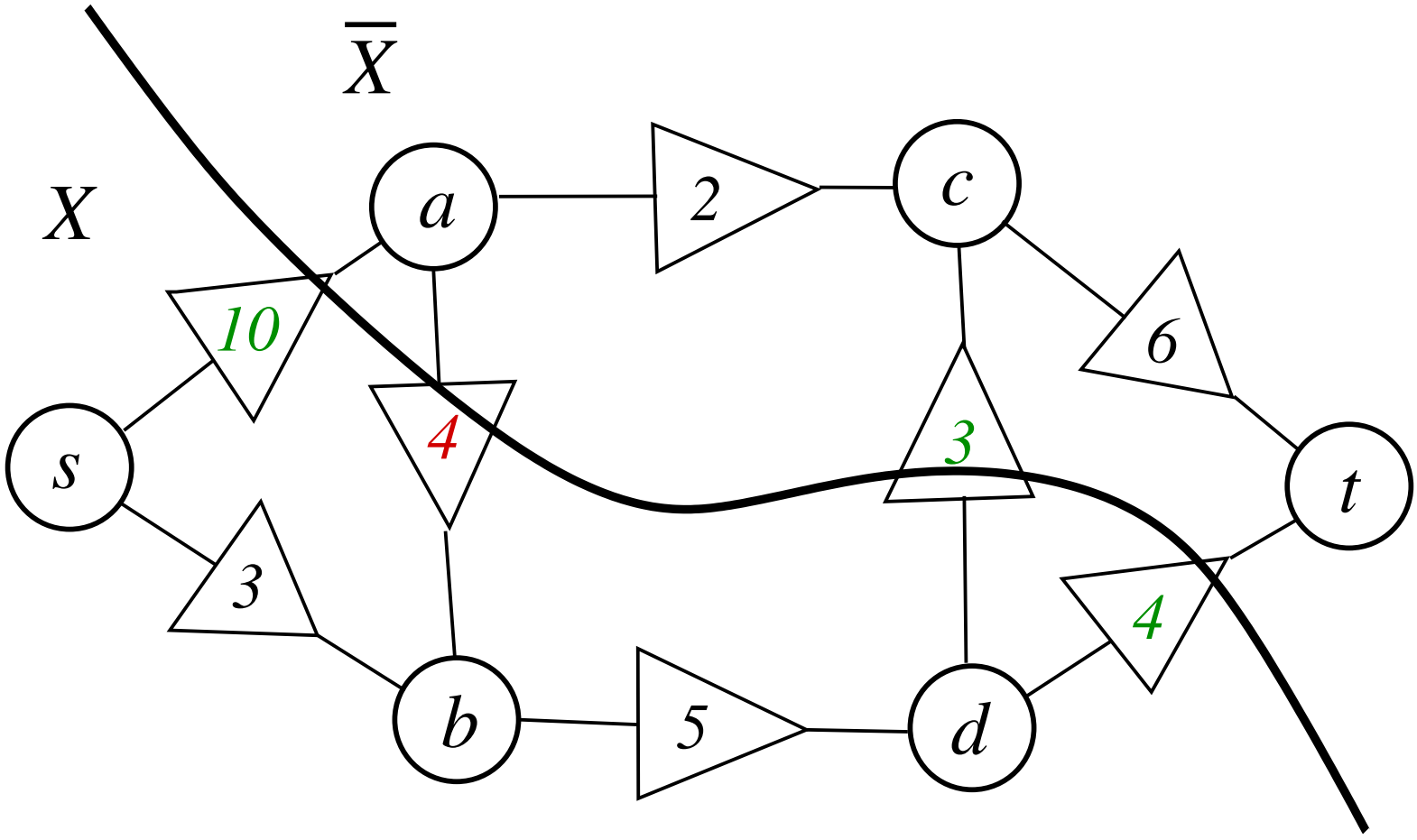
- Ford, L. R., Jr. ; Fulkerson, D. R. (1956), *Maximal flow through a network*, Canadian Journal of Mathematics 8 : 399–404.
- L. R. Ford ; D. R. Fulkerson (1962). Flows in Networks.

Définition

Une **coupe** d'un graphe valué $G = (E, \Gamma, c)$ possédant un seul sommet source s et un seul sommet puits t, est une partition des sommets notée $(X, \overline{X})$ telle que :

- $E = X \cup \overline{X}$
- $X \cap \overline{X} = \emptyset$
- $s \in X$ et $t \in \overline{X}$

La **capacité de la coupe** est définie par $c(X, \overline{X}) = \sum_{\substack{i \in X \\ j \in \overline{X}}} c_{ij}$



Capacité de la coupe $c(X, \overline{X}) = 10 + 3 + 4 = 17$.

On peut comparer la valeur d'un flot avec la capacité d'une coupe du graphe.

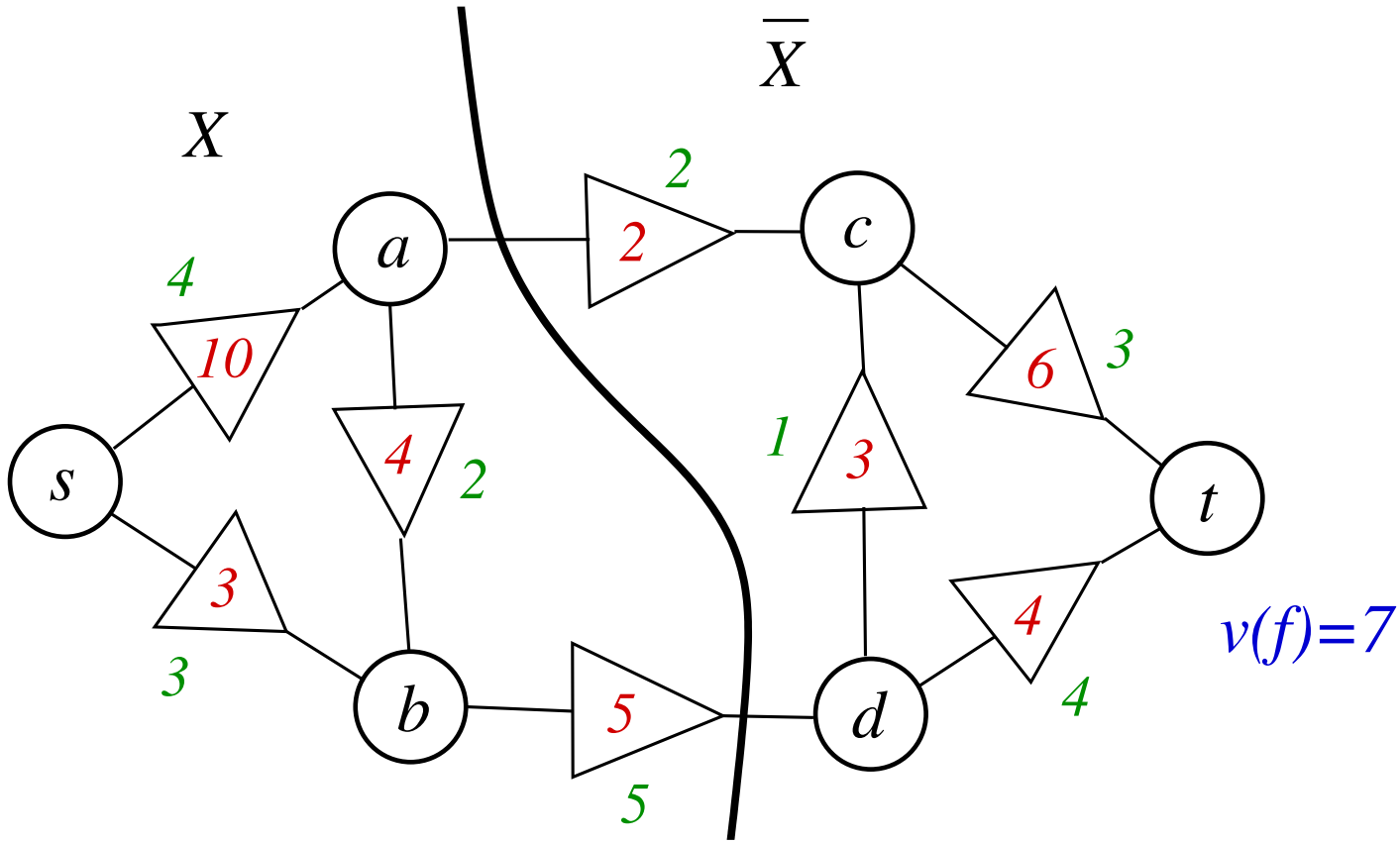
Théorème de Ford-Fulkerson

Soit $G = (E, \Gamma, c)$ un graphe valué. Pour tout flot réalisable f et toute coupe $(X, \overline{X})$, on a

$$v(f) \leq c(X, \overline{X})$$

où $v(f)$ est la valeur du flot f.

Le théorème de Ford-Fulkerson permet de savoir si un flot est maximal ou non. Par exemple :



$v(f) = 7$ et $c(X, \overline{X}) = 7 \Rightarrow$ flot maximal.

Démonstration du théorème de Ford-Fulkerson

Convention : si l'arête (i, j) n'existe pas dans le graphe, on pose $f_{ij} = 0$.

$$\Rightarrow v(f) = \sum_{j \in S(s)} f_{sj} = \sum_{j \in E} f_{sj}.$$

On montre que

$$v(f) = \sum_{\substack{i \in X \\ j \in \overline{X}}} f_{ij} - \sum_{\substack{i \in X \\ k \in \overline{X}}} f_{ki}$$

flot de X à $\overline{X}$ — flot de $\overline{X}$ à X

$$\Rightarrow v(f) \leq \sum_{\substack{i \in X \\ j \in \overline{X}}} c_{ij} = c(X, \overline{X})$$

Démonstration de la relation $v(f) = \sum_{\substack{i\in X\\ j\in\overline{X}}} f_{ij} - \sum_{\substack{i\in X\\ k\in\overline{X}}} f_{ki}$.

D'après la conversation des flux : $\sum_{j\in E} f_{ij} - \sum_{k\in E} f_{ki} = 0$ pour tout $i \neq s, t$.

On somme sur $i \in X, i \neq s$: $\sum_{\substack{i\in X\\ i\neq s}} \Big(\sum_{j\in E} f_{ij} - \sum_{k\in E} f_{ki} \Big) = 0$

soit

$$\sum_{i\in X} \Big(\sum_{j\in E} f_{ij} - \sum_{k\in E} f_{ki} \Big) - \underbrace{\sum_{j\in E} f_{sj}}_{=v(f)} - \sum_{k\in E} \underbrace{f_{ks}}_{=0} = 0.$$

On obtient

$$v(f)v = \sum_{\substack{i\in X\\ j\in X}} \cancel{f_{ij}} + \sum_{\substack{i\in X\\ j\in\overline{X}}} f_{ij} - \sum_{\substack{i\in X\\ k\in X}} \cancel{f_{ki}} - \sum_{\substack{i\in X\\ k\in\overline{X}}} f_{ki} = \sum_{\substack{i\in X\\ j\in\overline{X}}} f_{ij} - \sum_{\substack{i\in X\\ k\in\overline{X}}} f_{ki}$$

□

3) Coupe minimale

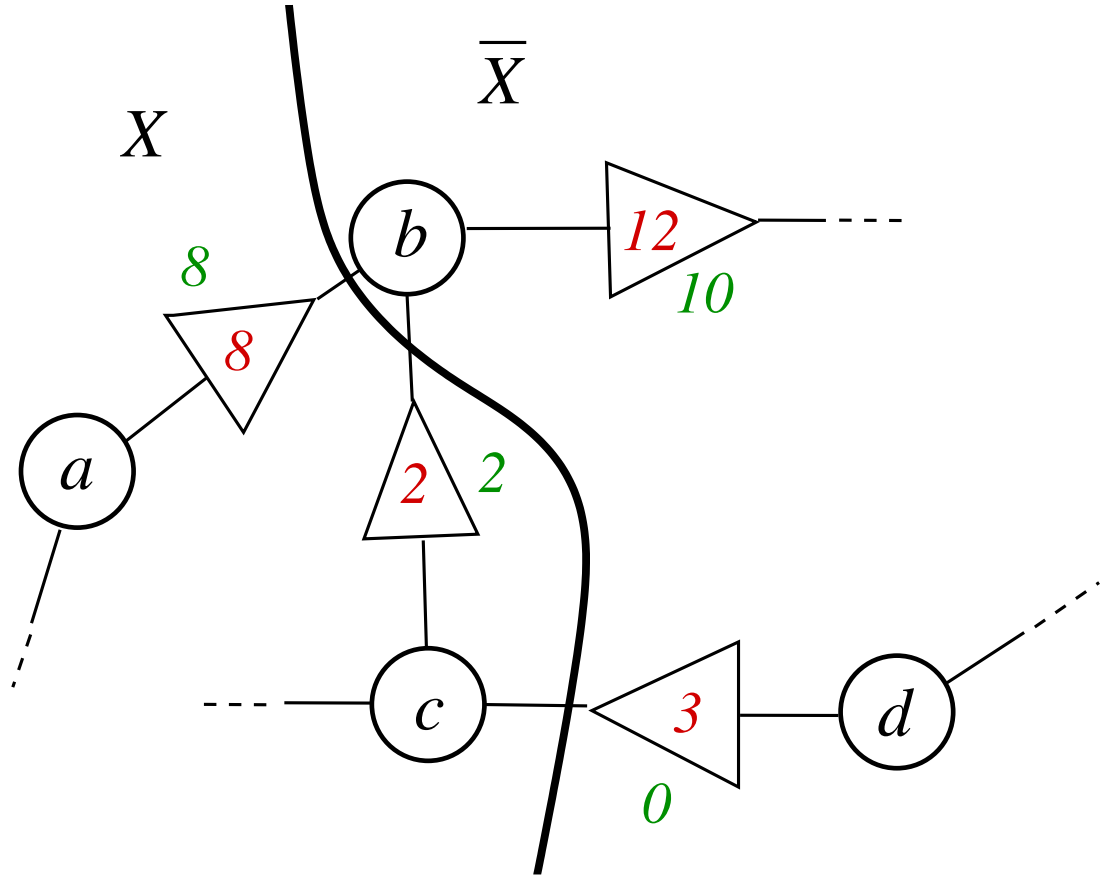
Le Théorème de Ford-Fulkerson admet un corollaire qui donne une condition suffisante pour avoir un flot maximal.

On dit qu'une arête $(i, j) \in \Gamma$ est **saturée** si $f_{ij} = c_{ij}$ et qu'elle est **insaturée** si $f_{ij} = 0$

Définition

Une coupe $(X, \overline{X})$ est dite **minimale** pour f si toute arête de X vers $\overline{X}$ est saturée et toute arête de $\overline{X}$ vers X est insaturée.

Coupe minimale $(X, \overline{X})$



- arêtes (a, b) et (c, b) **saturées**
- arête (d, c) **insaturée**

Proposition

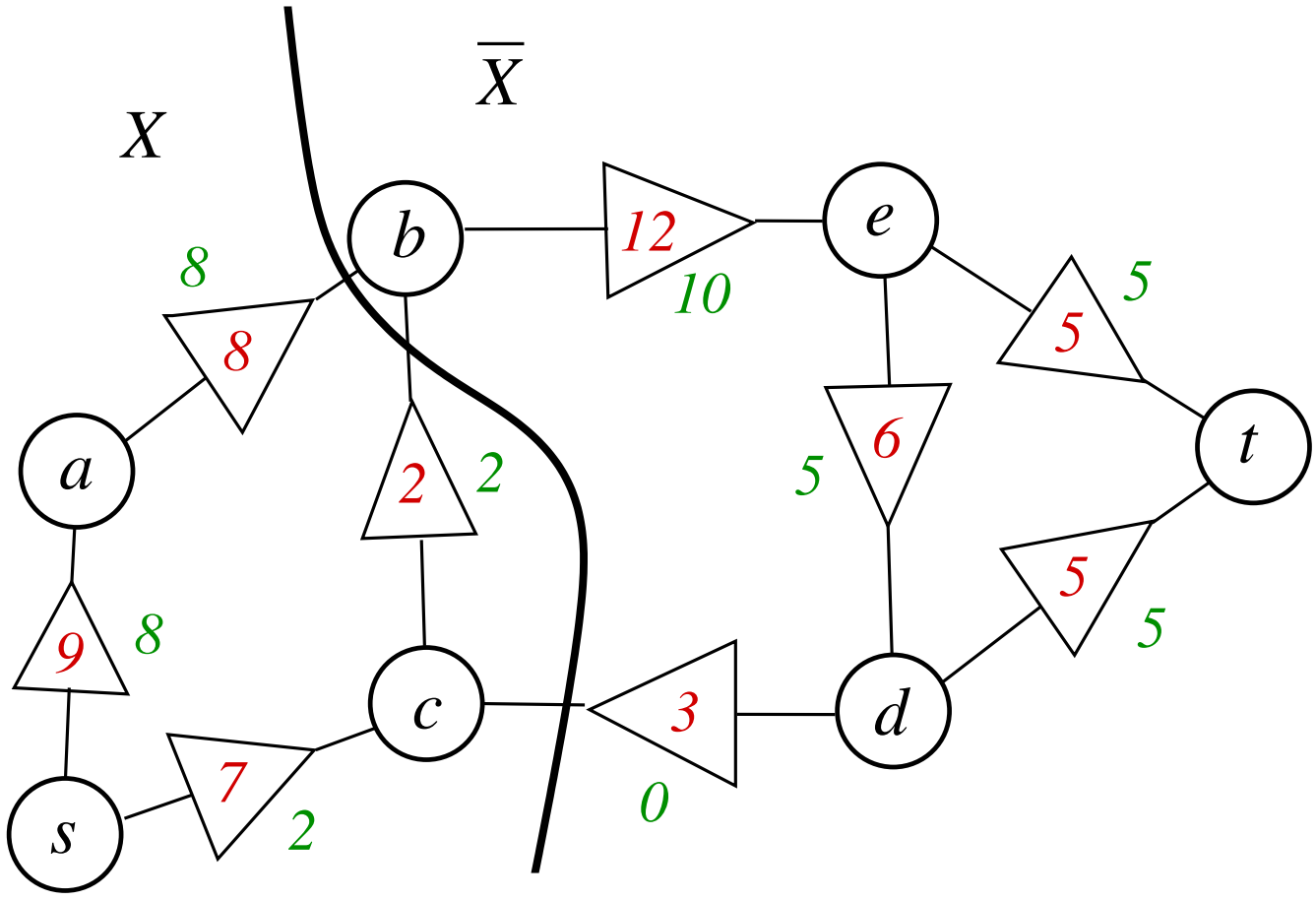
S'il existe une coupe minimale pour un flot f, alors ce flot est maximal.

Preuve. A partir de la formule établie dans le th. de Ford-Fulkerson :

$$v(f) = \sum_{\substack{i \in X \\ j \in \overline{X}}} \overbrace{f_{ij}}^{=c_{ij}} - \sum_{\substack{i \in X \\ k \in \overline{X}}} \overbrace{f_{ki}}^{=0} = c(X, \overline{X})$$

$\Rightarrow$ $v(f)$ est maximal. $\square$

Coupe minimale / flot maximal



$\Rightarrow$ flot maximal $v(f) = c(X, \overline{X}) = 10$

1) Condition nécessaire et suffisante de flot maximal

Définition 1.

Une chaîne d'un graphe est une suite de sommets

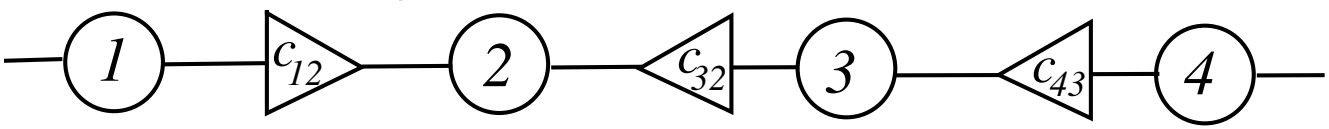
$$\mathcal{C} = (i_1, i_2, \cdots, i_p, i_{p+1}, \cdots, i_q)$$

reliés entre eux par des arêtes c'est-à-dire tels que

$$(i_p, i_{p+1}) \in \Gamma \quad \text{ou} \quad (i_{p+1}, i_p) \in \Gamma$$

(arête **directe**) (arête **inverse**)

Une chaîne ne tient pas compte de l'orientation des arêtes reliant les sommets (chaîne $\neq$ chemin).

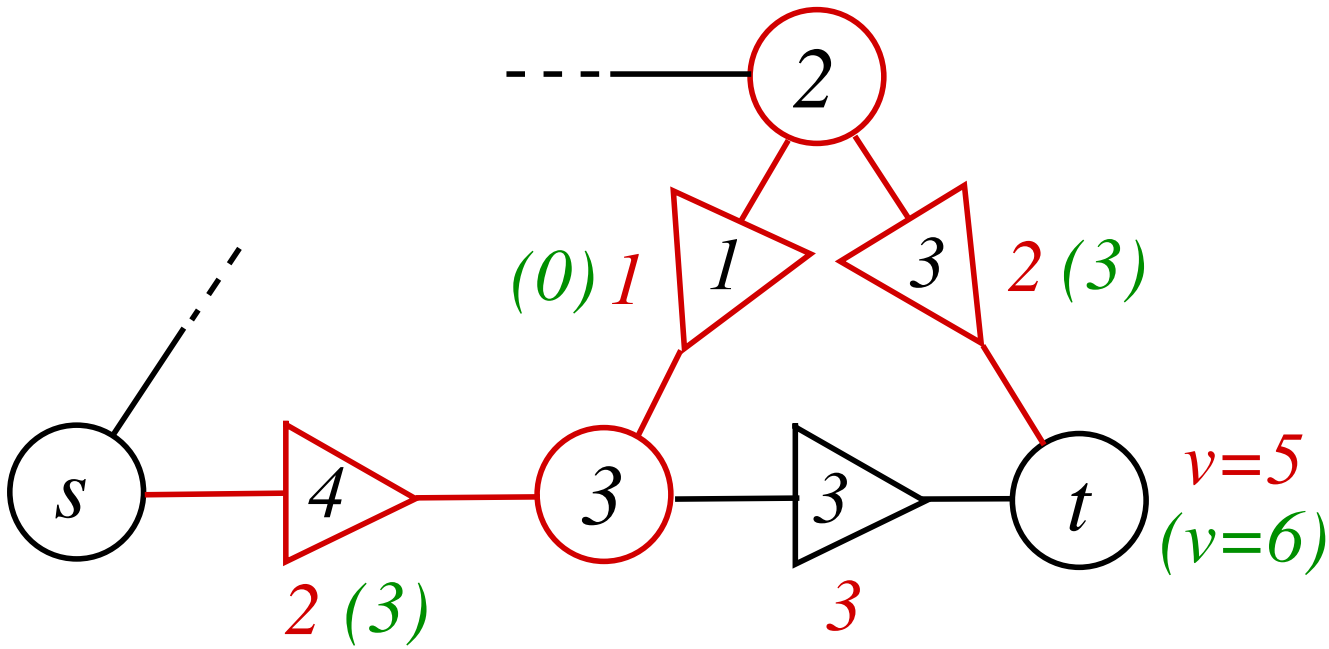


Définition 2.

Soit $G = (E, \Gamma, c)$ un graphe valué possédant une seule source s et un seul puits t. Une chaîne $\mathcal{C} = (s, i_1, i_2, \cdots, i_p, i_{p+1}, \cdots, i_q, t)$ est dite **améliorante** pour un flot réalisable f donné si :

- $f(i_p, i_{p+1}) < c(i_p, i_{p+1})$ si $(i_p, i_{p+1}) \in \Gamma$ (arête directe)
- $f(i_{p+1}, i_p) > 0$ si $(i_{p+1}, i_p) \in \Gamma$ (arête inverse)

Remarque : ce qui compte ici, ce sont les inégalites strictes.



L'algorithme de Ford-Fulkerson permet de trouver un flot maximal par recherche de chaînes améliorantes. Il est basé sur le résultat suivant :

Théorème

Un flot réalisable est maximal si et seulement s'il n'existe pas de chaîne améliorante.

L'algorithme de Ford-Fulkerson permet de trouver un flot maximal par recherche de chaînes améliorantes. Il est basé sur le résultat suivant :

Théorème

Un flot réalisable est maximal si et seulement s'il n'existe pas de chaîne améliorante.

Preuve.

***i*) Condition nécessaire**

Soit f un flot réalisable maximal. On suppose par l'absurde qu'il existe une chaîne améliorante $\mathcal{C} = (s, i_1, i_2, \cdots, i_p, i_{p+1}, \cdots, i_q, t)$. On note

$$\varepsilon_1 = \min\{c(i_p, i_{p+1}) - f(i_p, i_{p+1}) \text{ tel que } (i_p, i_{p+1}) \in \Gamma \text{ (arête directe)}\}$$

$$\varepsilon_2 = \min\{f(i_{p+1}, i_p) \text{ tel que } (i_{p+1}, i_p) \in \Gamma \text{ (arête inverse)}\}$$

$$\rightarrow \boxed{\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} > 0}$$

ε représente l'amélioration qu'on peut apporter au flot.

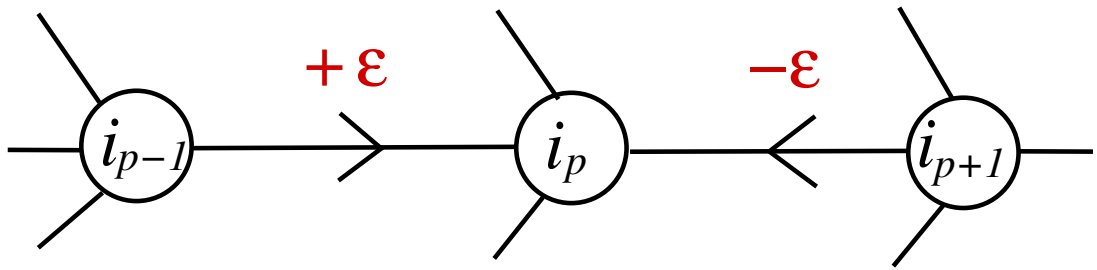
Nouveau flot f' qui coïncide avec f en dehors de la chaîne améliorante. Sur les arêtes de la chaîne :

- Si $(i_p, i_{p+1}) \in \Gamma$ (arête directe) alors

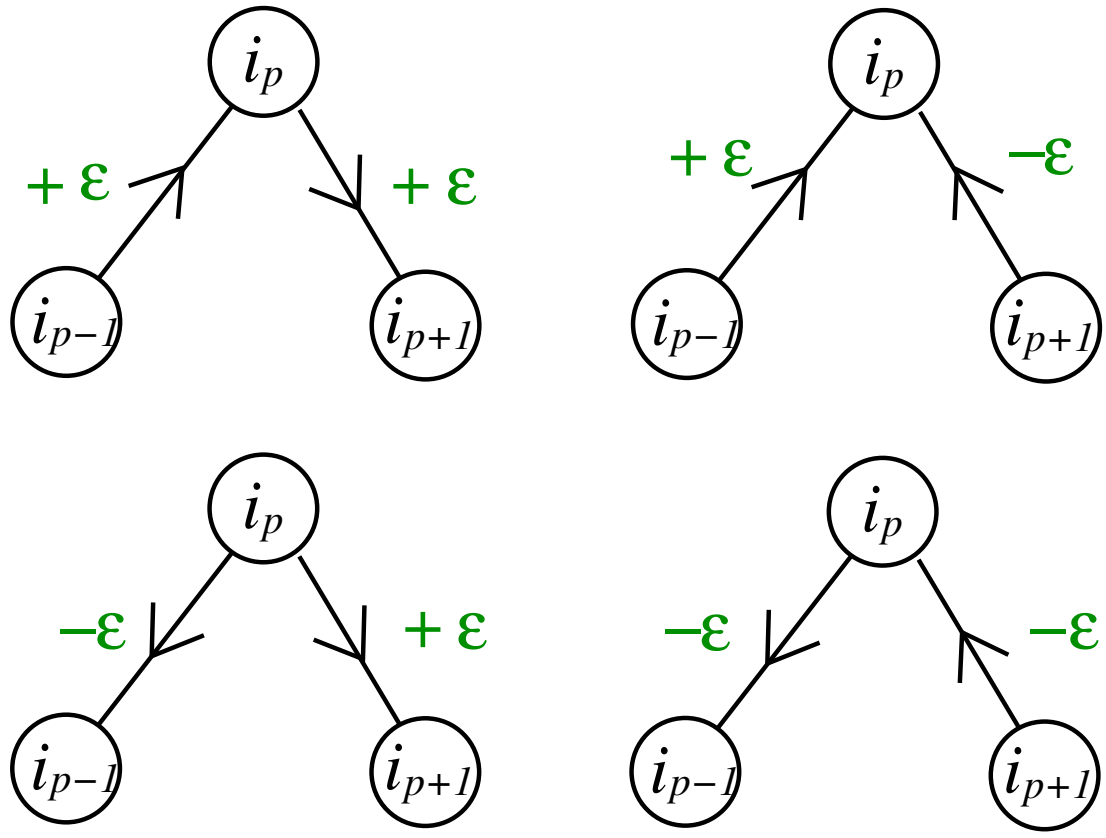
$$f'(i_p, i_{p+1}) = f(i_p, i_{p+1}) + \varepsilon$$

- Si $(i_{p+1}, i_p) \in \Gamma$ (arête inverse) alors

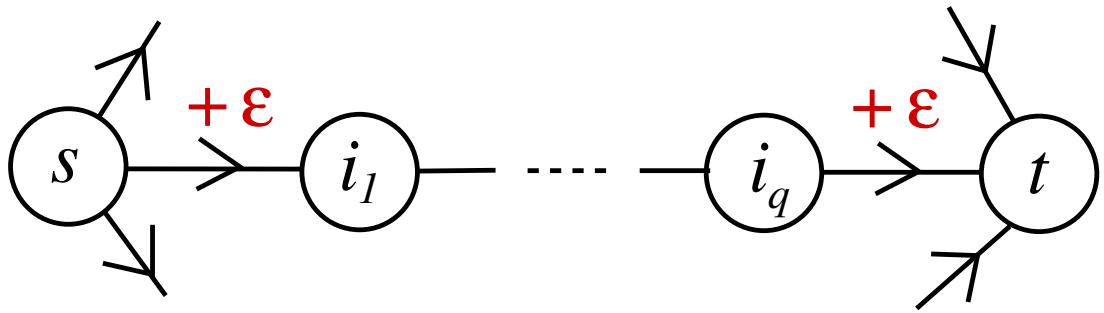
$$f'(i_p, i_{p+1}) = f(i_p, i_{p+1}) - \varepsilon$$



- Le nouveau flot f' est bien **réalisable**. En particulier, il y a conservation des flux en chaque sommet : 4 cas possibles



- Le nouveau flot f' est augmenté de $+\varepsilon$ quand il arrive au puits t : $v(f') = v(f) + \varepsilon$.



$\Rightarrow$ le flot f n'est pas maximal $\Rightarrow$ contradiction. $\square$

ii) **Condition suffisante**

On suppose qu'il n'existe pas de chaîne améliorante. On va montrer que le flot est maximal en trouvant une coupe $(X, \overline{X})$ telles que $v(f) = c(X, \overline{X})$ (Th. Ford-Fulkerson).

Construction de la coupe $(X, \overline{X})$

X est l'ensemble des sommets qui sont **marqués** de la façon suivante :

1. On marque la source s
2. A partir de tous les sommets i marqués, marquer tous les sommets j non encore marqués tels que

$$f(i,j) < c(i,j) \text{ (arête directe)} \quad \text{ou} \quad f(j,i) > 0 \text{ (arête inverse)}$$

3. Recommencer en 2) jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de marquage possible.

$\Rightarrow$ A l'issue du marquage, on a $v(f) = c(X, \overline{X})$. $\square$

Remarque : le puits t ne peut pas être marqué sinon il y aurait une chaîne améliorante.

2) Algorithme de Ford-Fulkerson

- Initialisation par un flot initial réalisable ($f = 0$)
- Tant que le flot n'est pas maximal
  - Marquage de la source s
  - Tant qu'on marque des sommets

    Pour tout sommet marqué i

    Marquer les sommets j non marqués tq $f(i,j) < c(i,j)$ ou $f(j,i) > 0$

    Fin pour

    Fin Tant que
  - Si le puits t n'est pas marqué alors le flot est maximal
    Sinon amélioration du flot

  Fin Tant que

Amélioration du flot

- trouver une chaîne qui a permis de marquer t et calculer $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2) > 0$ avec

$$\varepsilon_1 = \min\{c(i_p, i_{p+1}) - f(i_p, i_{p+1}) \text{ avec } (i_p, i_{p+1}) \in \Gamma \text{ (arête directe)}\}$$

$$\varepsilon_2 = \min\{f(i_{p+1}, i_p) \text{ avec } (i_{p+1}, i_p) \in \Gamma \text{ (arête inverse)}\}$$

- trouver le nouveau flot f' :
  - Si $(i_p, i_{p+1}) \in \Gamma$ (arête directe) alors $f'(i_p, i_{p+1}) = f(i_p, i_{p+1}) + \varepsilon$
  - Si $(i_{p+1}, i_p) \in \Gamma$ (arête inverse) alors $f'(i_p, i_{p+1}) = f(i_p, i_{p+1}) - \varepsilon$

3) Parcours de graphe

- **Parcours profondeur (DFS)**

3) Parcours de graphe

- **Parcours profondeur (DFS)**

  Exploration en profondeur des chemins : pour chaque sommet, on prend et on marque le premier sommet successeur jusqu'à ce qu'un sommet n'ait plus de successeur ou bien que tous ses successeurs soient déjà marqués.

3) Parcours de graphe

- **Parcours profondeur (DFS)**

  Exploration en profondeur des chemins : pour chaque sommet, on prend et on marque le premier sommet successeur jusqu'à ce qu'un sommet n'ait plus de successeur ou bien que tous ses successeurs soient déjà marqués.

  On utilise généralement **une pile** pour l'exploration des sommets.

3) Parcours de graphe

- **Parcours profondeur (DFS)**

  Exploration en profondeur des chemins : pour chaque sommet, on prend et on marque le premier sommet successeur jusqu'à ce qu'un sommet n'ait plus de successeur ou bien que tous ses successeurs soient déjà marqués.

  On utilise généralement **une pile** pour l'exploration des sommets.

  Utilisations :

  - Pour un graphe non-orienté, calcul des *composantes connexes*.
  - Pour un graphe orienté sans cycle, *tri topologique* des sommets : ordre des sommets tel qu'un sommet est toujours visité avant ses successeurs. En dépilant, on obtient un tri topologique (en ordre inverse).

III. Algorithme de Ford-Fulkerson

- **Parcours largeur (BFS)**

III. Algorithme de Ford-Fulkerson

- **Parcours largeur (BFS)**

  A partir d'un sommet, on liste et on marque tous les sommets successeurs non encore marqués, jusqu'à ce qu'un sommet n'ait plus de successeur ou bien que tous ses successeurs soient déjà marqués.

- **Parcours largeur (BFS)**

  A partir d'un sommet, on liste et on marque tous les sommets successeurs non encore marqués, jusqu'à ce qu'un sommet n'ait plus de successeur ou bien que tous ses successeurs soient déjà marqués.

  On utilise généralement **une file** (liste FIFO) pour l'exploration des sommets.

- **Parcours largeur (BFS)**

  A partir d'un sommet, on liste et on marque tous les sommets successeurs non encore marqués, jusqu'à ce qu'un sommet n'ait plus de successeur ou bien que tous ses successeurs soient déjà marqués.

  On utilise généralement **une file** (liste FIFO) pour l'exploration des sommets.

  Utilisations :

  - Le parcours en largeur explore tous les sommets accessibles depuis le sommet initial $\Rightarrow$ calcul des *composantes connexes*.
  - Recherche du plus court chemin (nb minimum d'arêtes) entre deux sommets.

Algorithme BFS et plus court chemin

Initialement, tous les sommets sont non-marqués et la file est vide.

Marquer et insérer le sommet s de départ dans la file.
Initialisation de la distance $D(s) = 0$.

Tant que la file n'est pas vide
- Supprimer le sommet P situé en tête de file.
- Pour chaque successeur non marqué Q de P,
  - Marquer et insérer Q dans la file
  - Calcul de la distance de Q à s : $D(Q) = D(P) + 1$.

  Fin Pour

Fin Tant que

Algorithme BFS et plus court chemin

Initialement, tous les sommets sont non-marqués et la file est vide.

Marquer et insérer le sommet s de départ dans la file.
Initialisation de la distance $D(s) = 0$.

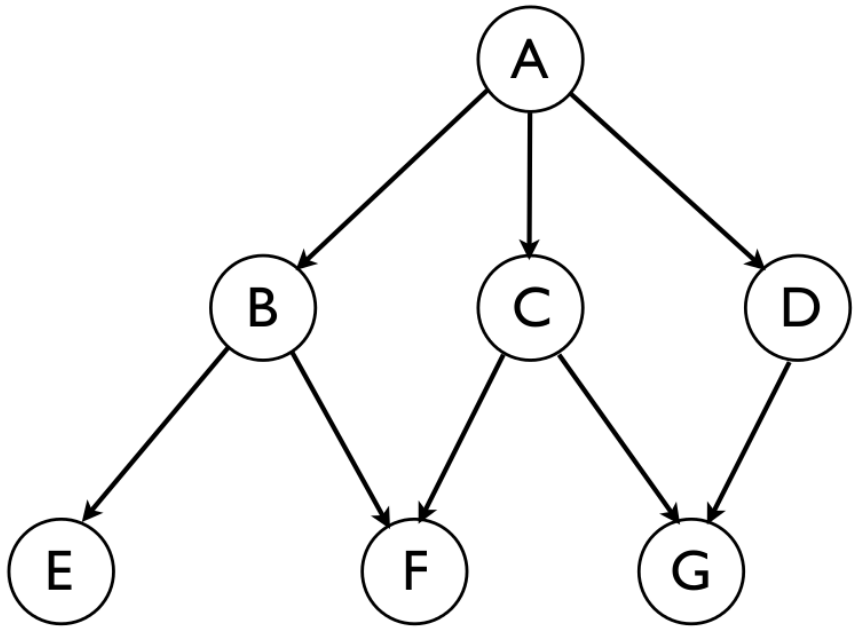
Tant que la file n'est pas vide
- Supprimer le sommet P situé en tête de file.
- Pour chaque successeur non marqué Q de P,
  - Marquer et insérer Q dans la file
  - Calcul de la distance de Q à s : $D(Q) = D(P) + 1$.

  Fin Pour

Fin Tant que

☞ On obtient la liste des sommets accessibles à partir de s (sommets marqués) et D est la distance la plus courte (nb minimum d'arêtes) de chaque sommet à s.

Exemple de parcours DFS / BFS



Parcours profondeur DFS : A,B,E,F,C,G,D (*tri topologique A,D,C,G,B,F,E*)

Parcours largeur BFS : A,B,C,D,E,F,G

Remarque. Dans la recherche d'une chaîne améliorante de l'algorithme de Ford Fulkerson, le parcours du graphe se fait en considérer non pas les successeurs d'un sommet mais les sommets voisins **accessibles au sens d'une chaîne améliorante**.

4) Un exemple

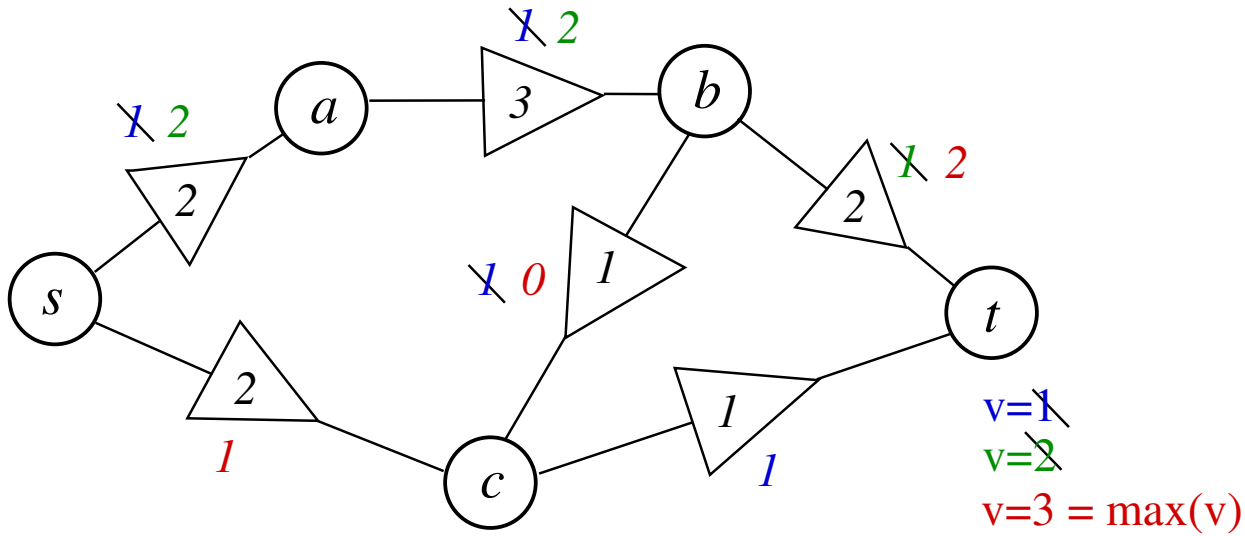
Considérations pratiques :

Dans la pratique, on utilise plusieurs tableaux

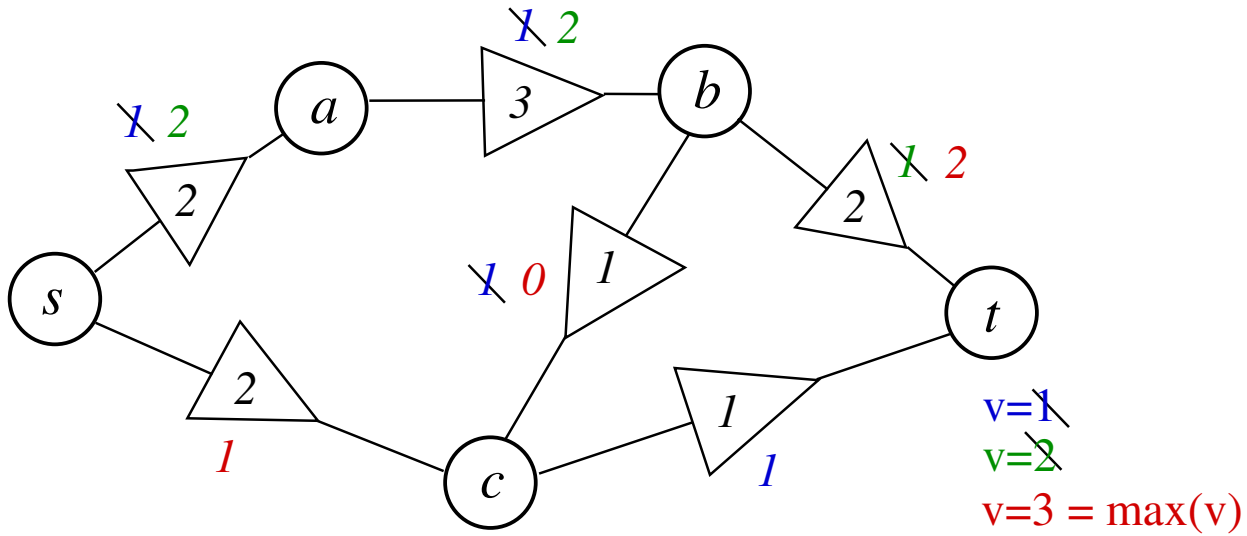
- $\mathbb{E} = \{\text{sommets marqués mais non complètement examinés}\}$
- tableau `orig` qui indique l'origine du marquage :

  arête directe $(i_p, i_{p+1}) \in \Gamma \rightarrow \texttt{orig}\,(i_{p+1}) = i_p$

  arête inverse $(i_{p+1}, i_p) \in \Gamma \rightarrow \texttt{orig}\,(i_p) = -i_{p+1}$
- tableau ε : amélioration possible du flot à chaque marquage.



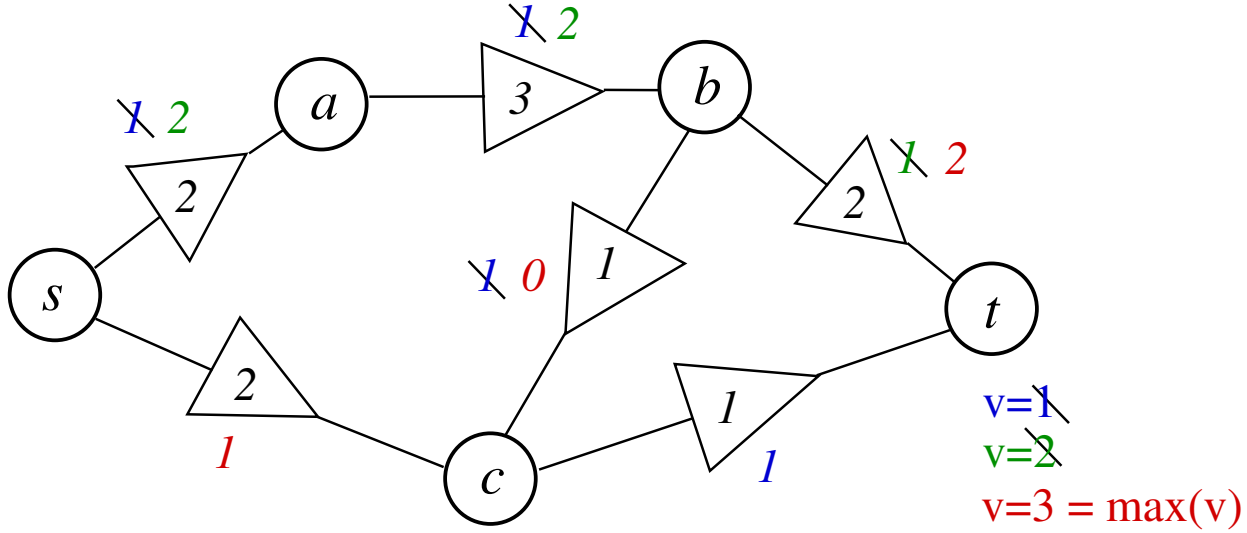
Marquage pile profondeur (DFS)



Marquage pile profondeur (DFS)

Etape 1 :

$\mathbb{E}$	s	a	b	c	t
orig	$-$	s	a	b	c
ε	∞	2	2	1	$\varepsilon = 1$



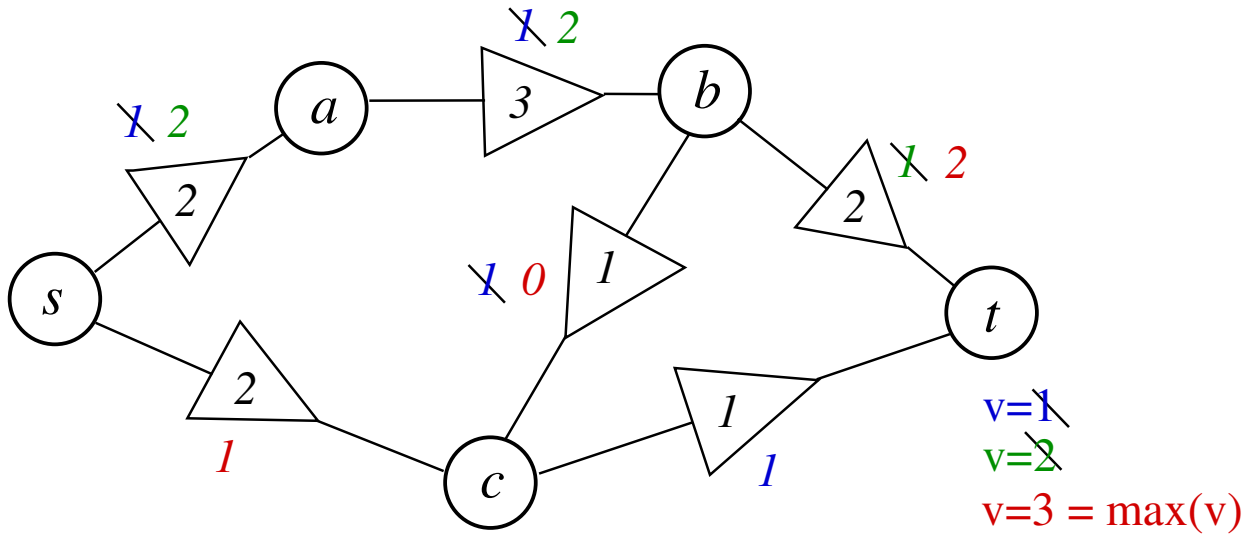
Marquage pile profondeur (DFS)

Etape 1 :

$\mathbb{E}$	s	a	b	c	t
orig	$-$	s	a	b	c
ε	∞	2	2	1	$\varepsilon = 1$

Etape 2 :

$\mathbb{E}$	s	a	b	t
orig	$-$	s	a	b
ε	∞	1	1	$\varepsilon = 1$



Marquage pile profondeur (DFS)

Etape 1 :

$\mathbb{E}$	s	a	b	c	t
orig	$-$	s	a	b	c
ε	∞	2	2	1	$\varepsilon = 1$

Etape 2 :

$\mathbb{E}$	s	a	b	t
orig	$-$	s	a	b
ε	∞	1	1	$\varepsilon = 1$

Etape 3 :

$\mathbb{E}$	s	c	b	a	t
orig	$-$	s	$-c$	$-b$	b
ε	∞	2	1	1	$\varepsilon = 1$

on dépile $\uparrow$

Etape 4 :

$\mathbb{E}$	s	c
orig	$-$	s
ε	∞	1

on dépile $\uparrow$ $\uparrow$

$\Rightarrow$ pile vide ($\mathbb{E} = \emptyset$).

Le puits t n'est pas marqué $\Rightarrow$ pas de chaîne améliorante $\Rightarrow$ flot maximal

Etape 4 :

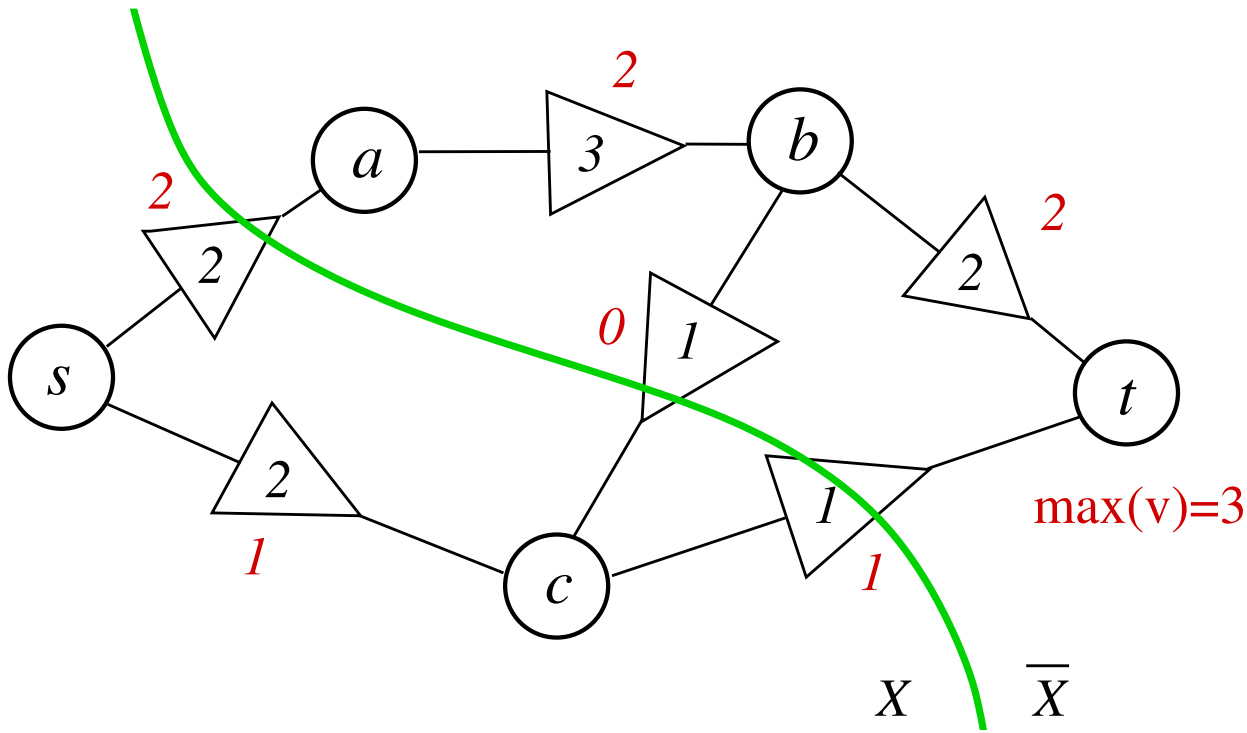
$\mathbb{E}$	s	c
orig	–	s
ε	∞	1

on dépile ↑ ↑

$\Rightarrow$ pile vide ($\mathbb{E} = \emptyset$).

Le puits t n'est pas marqué $\Rightarrow$ pas de chaîne améliorante $\Rightarrow$ flot maximal

Coupe minimale : $(X, \overline{X})$ avec $X = \{s, c\}$ et $\overline{X} = \{a, b, t\}$.
X est formé des sommets marqués à la dernière étape (pile vide).



5) Finitude et complexité

- Capacités à valeurs entières

  Pour des capacités à valeurs entières, l'algorithme de Ford-Fulkerson converge en un nombre fini d'opérations.

5) Finitude et complexité

- Capacités à valeurs entières

  Pour des capacités à valeurs entières, l'algorithme de Ford-Fulkerson converge en un nombre fini d'opérations.

  Pour un graphe avec n sommets et m arêtes :
  - $\mathcal{O}(m)$ opérations pour la recherche d'une chaîne améliorante et l'amélioration du flot.
  - La capacité d'une coupe est au plus en $\mathcal{O}(n \times C_{\max})$ où $C_{\max}$ est le maximum des capacités des arêtes. Dans le pire des cas, le flot augmente d'une seule unité à chaque fois. Il y a donc au plus $\mathcal{O}(nC_{\max})$ améliorations.

  $\Rightarrow$ $\mathcal{O}(nmC_{\max})$ opérations pour l'algorithme de Ford-Fulkerson.

5) Finitude et complexité

- Capacités à valeurs entières

  Pour des capacités à valeurs entières, l'algorithme de Ford-Fulkerson converge en un nombre fini d'opérations.

  Pour un graphe avec n sommets et m arêtes :
  - $\mathcal{O}(m)$ opérations pour la recherche d'une chaîne améliorante et l'amélioration du flot.
  - La capacité d'une coupe est au plus en $\mathcal{O}(n \times C_{\max})$ où $C_{\max}$ est le maximum des capacités des arêtes. Dans le pire des cas, le flot augmente d'une seule unité à chaque fois. Il y a donc au plus $\mathcal{O}(nC_{\max})$ améliorations.

  $\Rightarrow$ $\mathcal{O}(nmC_{\max})$ opérations pour l'algorithme de Ford-Fulkerson.

- Pour des capacités à valeurs réelles et un parcours en largeur (BFS), l'algorithme converge également.

6) Variante : Algorithme d'Edmonds-Karp (1972).

C'est une implémentation particulière de l'algorithme de Ford-Fulkerson en parcours largeur (BFS) et qui consiste à toujours choisir une chaine améliorante de **plus court chemin** de s à t, c'est-à-dire celle avec le moins d'arêtes possibles.

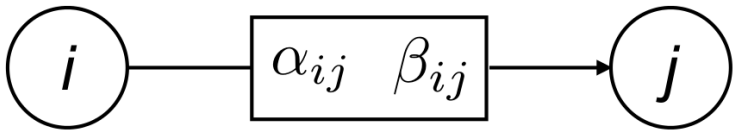
Cet algorithme se termine toujours (même pour des capacités non entières, contrairement à Ford-Fulkerson...) avec une complexité en $\mathcal{O}(nm^2)$ (indép. des capacités).

IV. Flot maximal avec bornes inférieures et supérieures

1) Introduction

- Graphe valué par des capacités inférieures $\{\alpha_{ij}\}$ et supérieures $\{\beta_{ij}\}$: $G = (E, \Gamma, (\{\alpha_{ij}\}, \{\beta_{ij}\}))$

  On note :

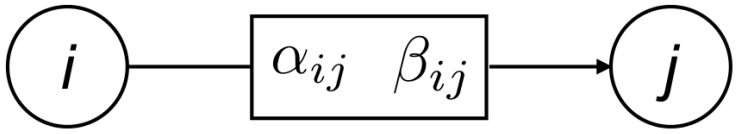


IV. Flot maximal avec bornes inférieures et supérieures

1) Introduction

- Graphe valué par des capacités inférieures $\{\alpha_{ij}\}$ et supérieures $\{\beta_{ij}\}$: $G = (E, \Gamma, (\{\alpha_{ij}\}, \{\beta_{ij}\}))$

  On note :



- Problème de flot maximal généralisé :

$$\max_{f_{ij}, v} [F = v]$$

$$\begin{cases} \sum_{k \in S(s)} f_{sk} - v = 0 \quad \text{(source } s\text{)} \\ -\sum_{i \in P(j)} f_{ij} + \sum_{k \in S(j)} f_{jk} = 0, \quad \forall j \neq s, t \\ -\sum_{i \in P(t)} f_{it} + v = 0 \quad \text{(puits } t\text{)} \\ \alpha_{ij} \leq f_{ij} \leq \beta_{ij} \quad \text{pour toute arête } (i,j) \in \Gamma \end{cases}$$

2) Condition nécessaire d'existence d'un flot réalisable pour G.

Proposition

S'il existe un flot $\{f_{ij}\}$ réalisable sur G vérifiant $\alpha_{ij} \leq f_{ij} \leq \beta_{ij}$ pour tout $(i,j) \in \Gamma$, alors pour tout $j \neq s, t$:

$$\sum_{i \in P(j)} \alpha_{ij} \leq \sum_{k \in S(j)} \beta_{jk} \quad (1)$$

$$\sum_{k \in S(j)} \alpha_{jk} \leq \sum_{i \in P(j)} \beta_{ij} \quad (2)$$

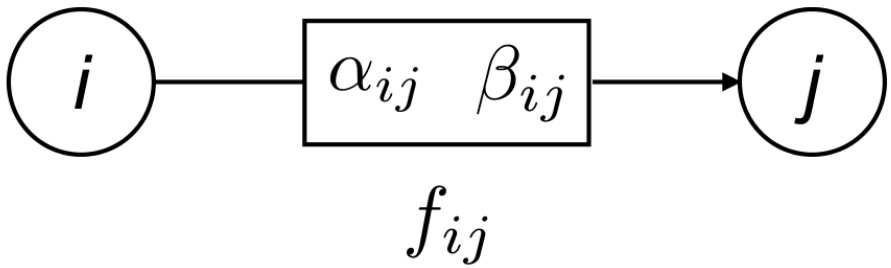
Démonstration. Soit $j \neq s, t$. On somme la relation $\alpha_{ij} \leq f_{ij} \leq \beta_{ij}$ sur $i \in P(j)$ puis sur $j \in S(i)$:

$$\sum_{i \in P(j)} \alpha_{ij} \leq \sum_{i \in P(j)} f_{ij} = \sum_{k \in S(j)} f_{jk} \leq \sum_{k \in S(j)} \beta_{jk}.$$

L'inégalité (2) se montre de la même façon. □

3) Adaptation de Ford-Fulkerson : flot maximal sur G.

On suppose qu'on dispose d'un flot initial réalisable sur G (cf. section suivante). On adapte l'algorithme de Ford-Fulkerson pour la recherche d'une chaine améliorante. On détermine ainsi un flot maximal sur G.



	arête directe	arête inverse
condition d'amélioration :	$f_{ij} < \beta_{ij}$	$f_{ij} > \alpha_{ij}$
amélioration possible :	$\varepsilon_1 = \beta_{ij} - f_{ij} > 0$	$\varepsilon_2 = f_{ij} - \alpha_{ij} > 0$

4) Recherche d'un flot réalisable sur G : graphe auxiliaire G'.

Il reste à déterminer un flot réalisable initial f sur G. On ne peut plus prendre $f \equiv 0$ partout sur G !

On se ramène au cas d'un flot positif par le changement de variable

$$\boxed{f'_{ij} = f_{ij} - \alpha_{ij}} \quad \text{pour tout } (i,j) \in \Gamma,$$

et le nouveau flot vérifie $0 \leq f'_{ij} \leq c'_{ij}$ avec

$$\boxed{c'_{ij} = \beta_{ij} - \alpha_{ij}}$$

4) Recherche d'un flot réalisable sur G : graphe auxiliaire G'.

Il reste à déterminer un flot réalisable initial f sur G. On ne peut plus prendre $f \equiv 0$ partout sur G !

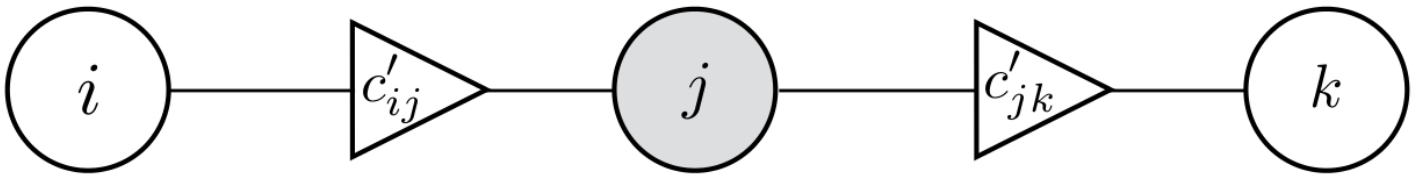
On se ramène au cas d'un flot positif par le changement de variable

$$\boxed{f'_{ij} = f_{ij} - \alpha_{ij}} \quad \text{pour tout } (i,j) \in \Gamma,$$

et le nouveau flot vérifie $0 \leq f'_{ij} \leq c'_{ij}$ avec

$$\boxed{c'_{ij} = \beta_{ij} - \alpha_{ij}}$$

on n'a plus conservation du flux pour $\{f'_{ij}\}$...



$$f'_{ij} = f_{ij} - \alpha_{ij} \quad \neq \quad f'_{jk} = f_{jk} - \alpha_{jk}$$

$$(f_{ij} = f_{jk})$$

IV. Flot maximal avec bornes inférieures et supérieures

Pour assurer la conservation du nouveau flux aux sommets, on introduit un **graphe valué auxiliaire** $G' = (E', \Gamma', c')$:

IV. Flot maximal avec bornes inférieures et supérieures

Pour assurer la conservation du nouveau flux aux sommets, on introduit un **graphe valué auxiliaire** $G' = (E', \Gamma', c')$:

- On ajoute deux sommets s' et t' : $E' = E \cup \{s', t'\}$

IV. Flot maximal avec bornes inférieures et supérieures

Pour assurer la conservation du nouveau flux aux sommets, on introduit un **graphe valué auxiliaire** $G' = (E', \Gamma', c')$:

- On ajoute deux sommets s' et t' : $E' = E \cup \{s', t'\}$
- On ajoute des arêtes reliant s' aux sommets $j \neq s$ et des arêtes reliant les sommets $j \neq t$ à t' :

$$\Gamma' = \Gamma \cup \{(s', j), \forall j \in E, j \neq s\} \cup \{(j, t'), \forall j \in E, j \neq t\}$$

Pour éviter d'avoir 2 sources s et s' et 2 puits t et t', on relie t à s par un arc de capacité infinie (s et t sont confondus pour G').

IV. Flot maximal avec bornes inférieures et supérieures

Pour assurer la conservation du nouveau flux aux sommets, on introduit un **graphe valué auxiliaire** $G' = (E', \Gamma', c')$:

- On ajoute deux sommets s' et t' : $E' = E \cup \{s', t'\}$
- On ajoute des arêtes reliant s' aux sommets $j \neq s$ et des arêtes reliant les sommets $j \neq t$ à t' :

$$\Gamma' = \Gamma \cup \{(s', j), \forall j \in E, j \neq s\} \cup \{(j, t'), \forall j \in E, j \neq t\}$$

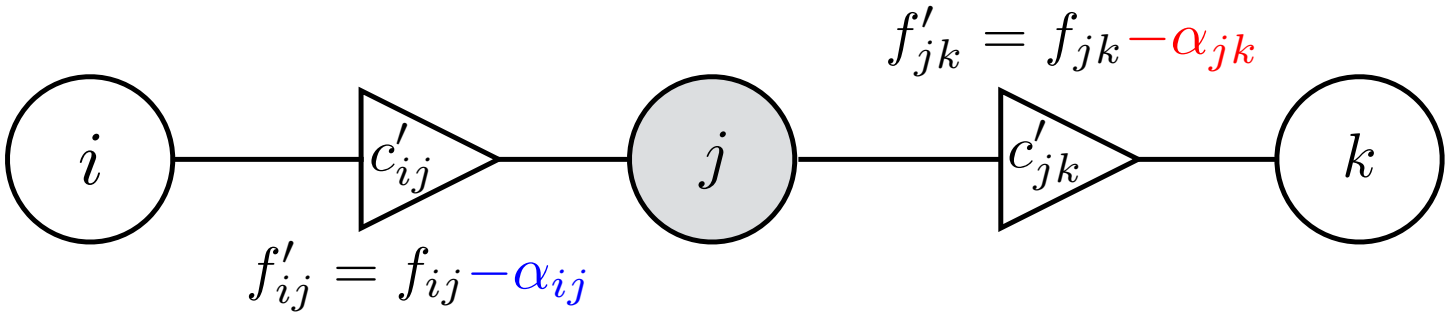
  Pour éviter d'avoir 2 sources s et s' et 2 puits t et t', on relie t à s par un arc de capacité infinie (s et t sont confondus pour G').
- Capacité c' :

$$c'_{ij} = \beta_{ij} - \alpha_{ij}, \quad \forall (i,j) \in \Gamma$$

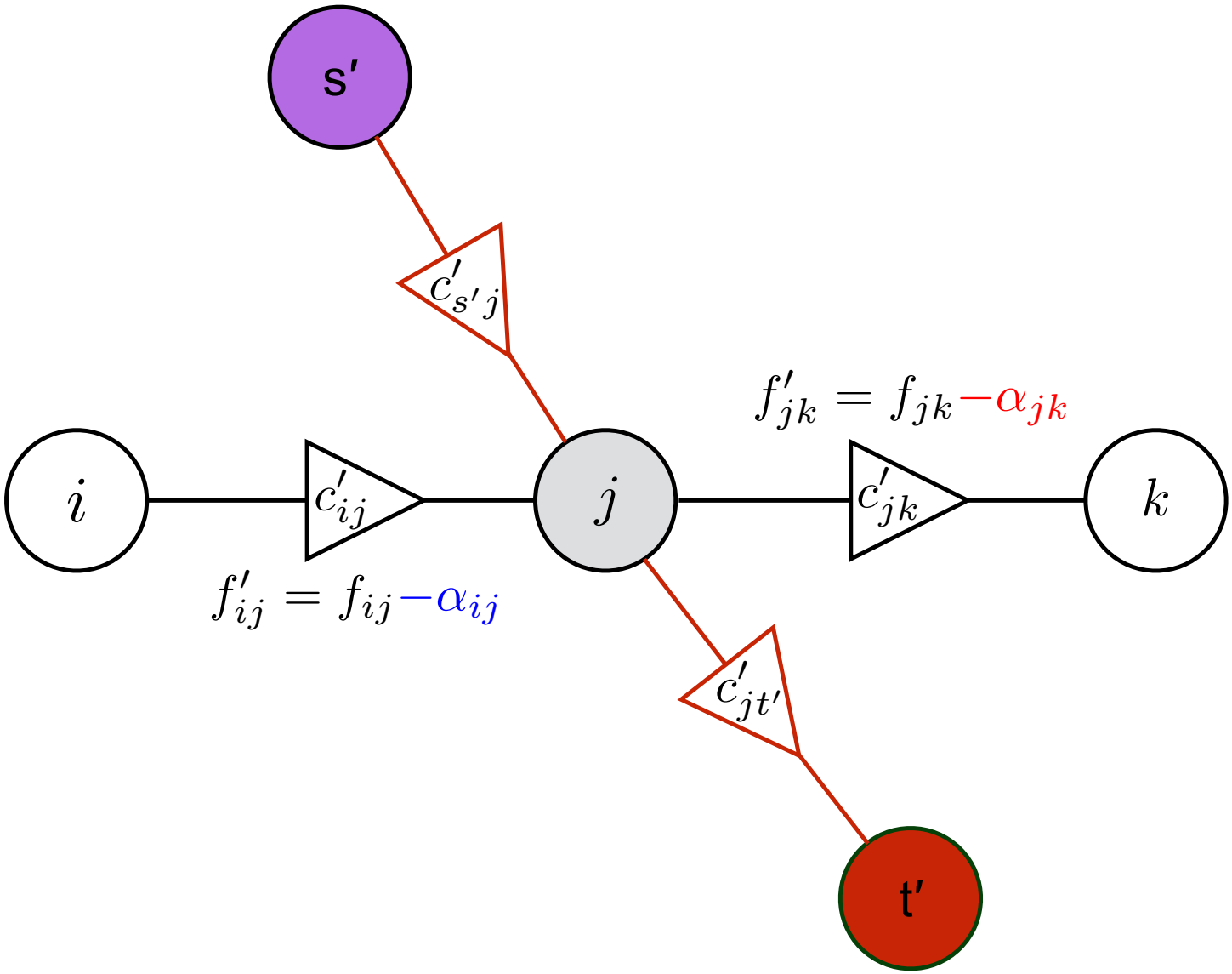
$$c'_{s'j} = \sum_{i \in P(j)} \alpha_{ij}, \quad \forall j \neq s$$

$$c'_{jt'} = \sum_{k \in S(j)} \alpha_{jk}, \quad \forall j \neq t$$

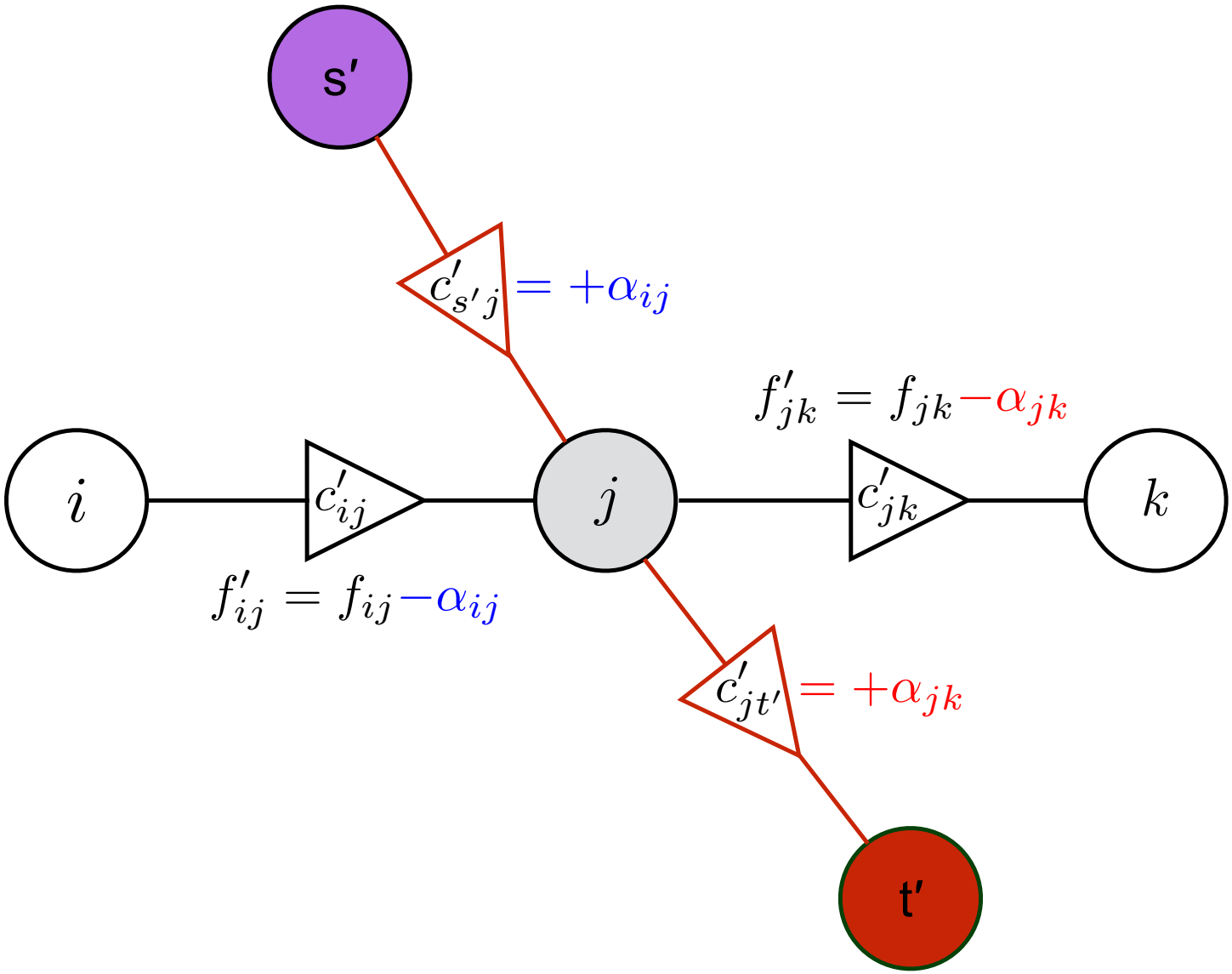
IV. Flot maximal avec bornes inférieures et supérieures



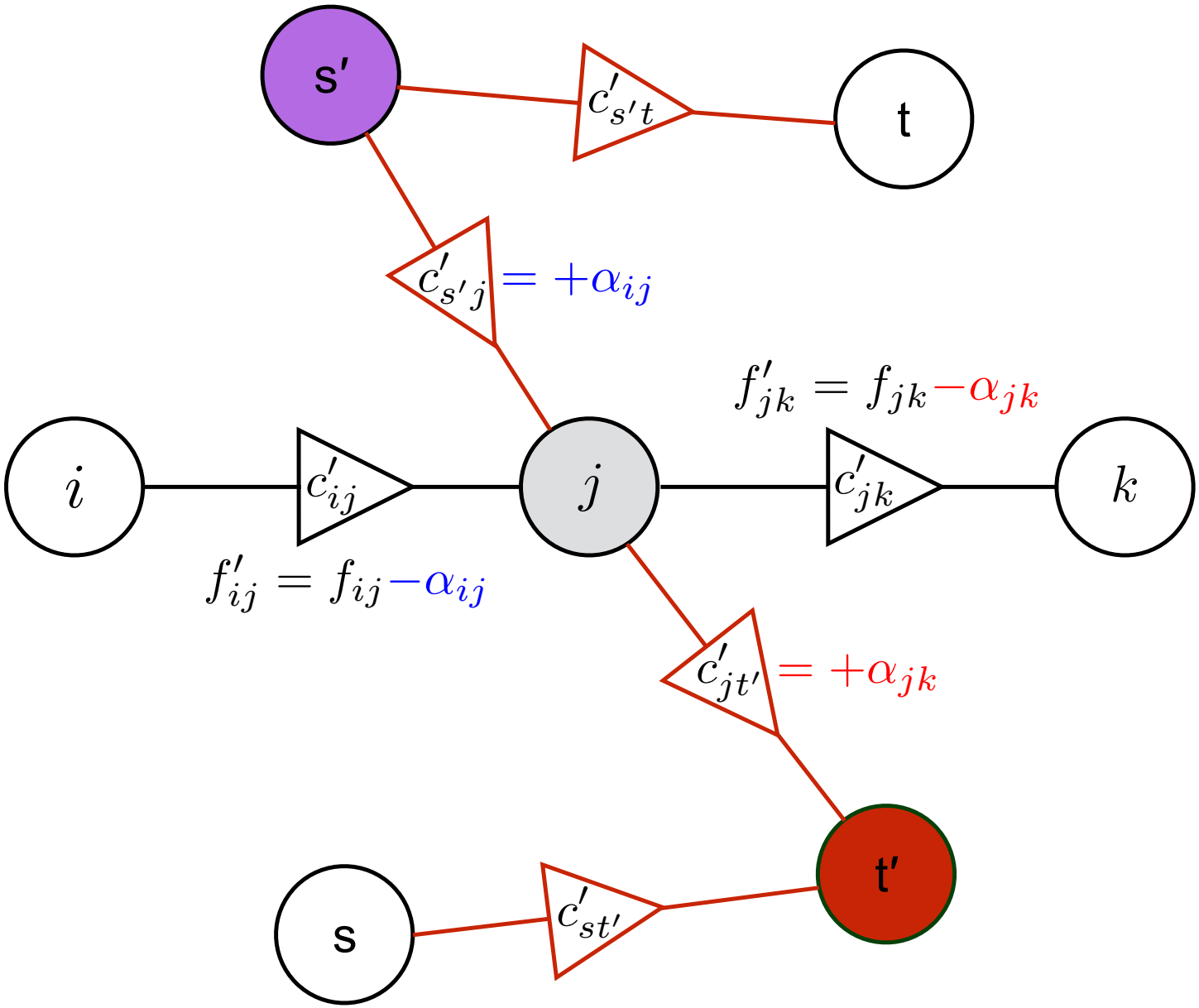
IV. Flot maximal avec bornes inférieures et supérieures



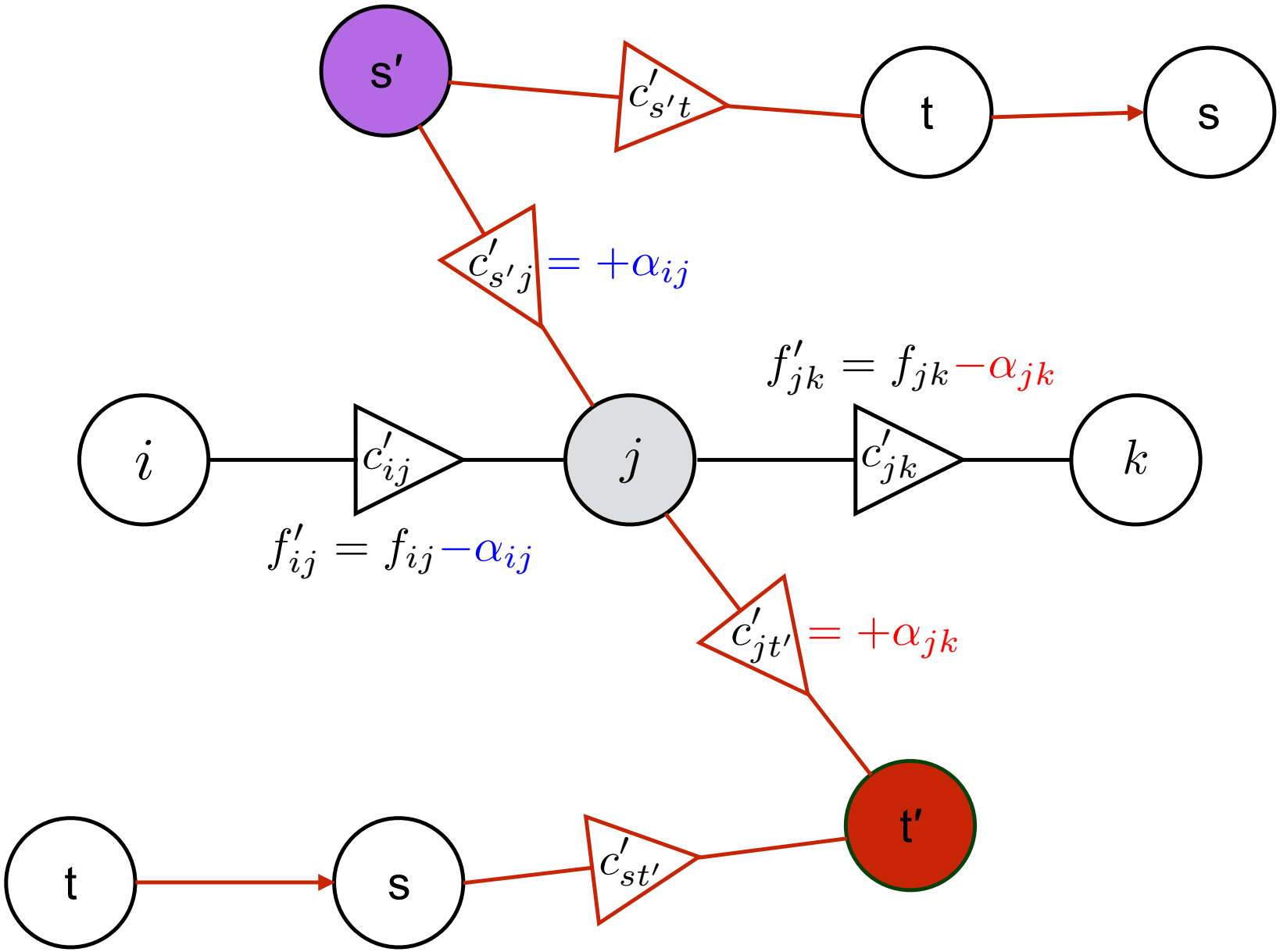
IV. Flot maximal avec bornes inférieures et supérieures



IV. Flot maximal avec bornes inférieures et supérieures



IV. Flot maximal avec bornes inférieures et supérieures



IV. Flot maximal avec bornes inférieures et supérieures

Soient $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ et $f' : \Gamma' \to \mathbb{R}$ telles que

$$\begin{aligned} f'_{ij} &= f_{ij} - \alpha_{ij}, \quad \forall (i,j) \in \Gamma \\ f'_{s'j} &= c'_{s'j} := \sum_{i \in P(j)} \alpha_{ij}, \quad \forall j \in E,\ j \neq s \\ f'_{jt'} &= c'_{jt'} := \sum_{k \in S(j)} \alpha_{jk}, \quad \forall j \in E,\ j \neq t \end{aligned} \tag{3}$$

$\{f'_{ij}\}$ est tel que toutes les arêtes (s', j) et (i, t') sont **saturées**, $\forall j \neq s'$, $\forall i \neq t'$.

Théorème (*CNS d'existence d'un flot réalisable sur G*)

Soient $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ et $f' : \Gamma' \to \mathbb{R}$ vérifiant (3). Alors,

1. pour tout $j \in E,\ j \neq s, j \neq t$,

$$-\sum_{i \in P(j)} f_{ij} + \sum_{k \in S(j)} f_{jk} = -\sum_{i \in P'(j)} f'_{ij} + \sum_{k \in S'(j)} f'_{jk} \qquad (4)$$

   où $P'(j)$ (resp. $S'(j)$) désigne les prédécesseurs (resp. successeurs) dans E' du sommet j.

2. $\{f_{ij}\}$ est un flot réalisable sur $G \Leftrightarrow \{f'_{ij}\}$ est un flot maximal sur G'

Démonstration

1. Soit $j \in E, j \neq s, t$. Par définition de $\{f'_{ij}\}$, on a

$$
\begin{aligned}
-\sum_{i \in P(j)} f_{ij} + \sum_{k \in S(j)} f_{jk} &= -\sum_{i \in P(j)} f'_{ij} - \underbrace{\sum_{i \in P(j)} \alpha_{ij}}_{= f'_{s'j}} \\
&\quad + \sum_{k \in S(j)} f'_{jk} + \underbrace{\sum_{k \in S(j)} \alpha_{jk}}_{= f'_{jt'}} \\
&= -\sum_{i \in P'(j)} f'_{ij} + \sum_{k \in S'(j)} f'_{jk}
\end{aligned}
$$

2. *i*) *Condition suffisante*.

   Soit $\{f'_{ij}\}$ un flot maximal sur G'. D'après (1), $\{f_{ij}\}$ est un flot sur G et pour tout $(i,j) \in \Gamma$,

$$0 \leq f'_{ij} \leq c'_{ij} := \beta_{ij} - \alpha_{ij} \quad \Rightarrow \quad \alpha_{ij} \leq f_{ij} = f'_{ij} + \alpha_{ij} \leq \beta_{ij}$$

   donc $\{f_{ij}\}$ est un flot réalisable sur G.

2. *i*) *Condition suffisante.*

   Soit $\{f'_{ij}\}$ un flot maximal sur G'. D'après (1), $\{f_{ij}\}$ est un flot sur G et pour tout $(i,j) \in \Gamma$,

   $$0 \leq f'_{ij} \leq c'_{ij} := \beta_{ij} - \alpha_{ij} \quad \Rightarrow \quad \alpha_{ij} \leq f_{ij} = f'_{ij} + \alpha_{ij} \leq \beta_{ij}$$

   donc $\{f_{ij}\}$ est un flot réalisable sur G.

   ii) *Condition nécessaire.*

   Soit $\{f_{ij}\}$ un flot réalisable sur G. Alors d'après (1), $\{f'_{ij}\}$ est un flot sur G'. De plus, il est réalisable ($0 \leq f'_{ij} \leq c'_{ij} := \beta_{ij} - \alpha_{ij}$). Par construction,

   - toutes les arêtes de G' qui partent de s' sont saturées pour $\{f'_{ij}\}$.
   - toutes les arêtes de G' qui arrivent en t' sont saturées.

   Il n'y a donc plus de chaîne améliorante possible $\Rightarrow$ $\{f'_{ij}\}$ est un flot maximal sur G'.

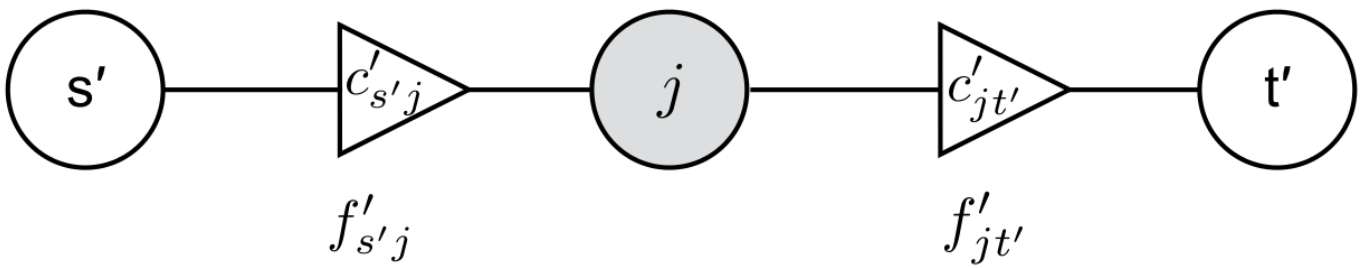
□

IV. Flot maximal avec bornes inférieures et supérieures

Pour trouver un flot réalisable pour G, il faut donc déterminer un flot maximal pour le graphe auxiliaire G'. On utilise pour cela l'algorithme de Ford-Fulkerson (dans sa version standard) sur G'.

Flot réalisable initial sur le graphe auxiliaire G'.

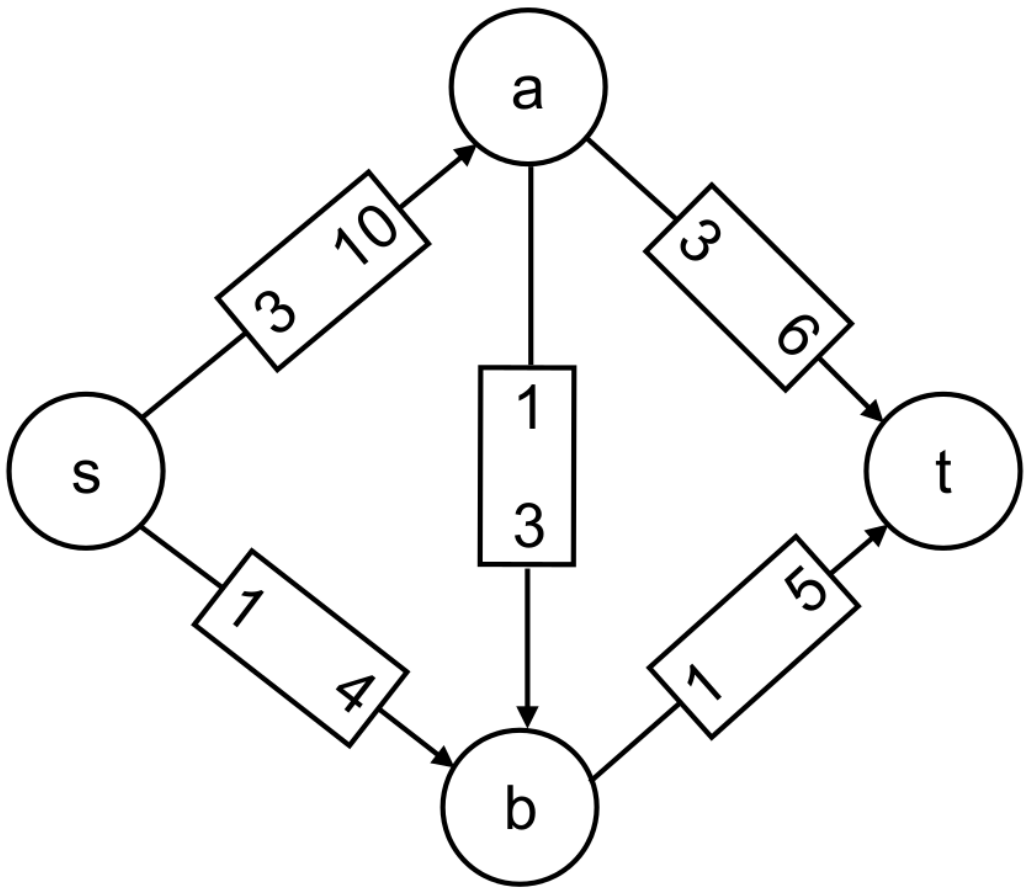
Comme flot initial sur G' on peut choisir le flot nul $f' \equiv 0$ mais on peut aussi faire un peu mieux :



$$f'_{s'j} = f'_{jt'} = \min(c'_{s'j},\ c'_{jt'}) \quad \text{pour tout } j \in E$$
$$f'_{ij} = 0 \quad \text{pour tout } (i,j) \in \Gamma$$

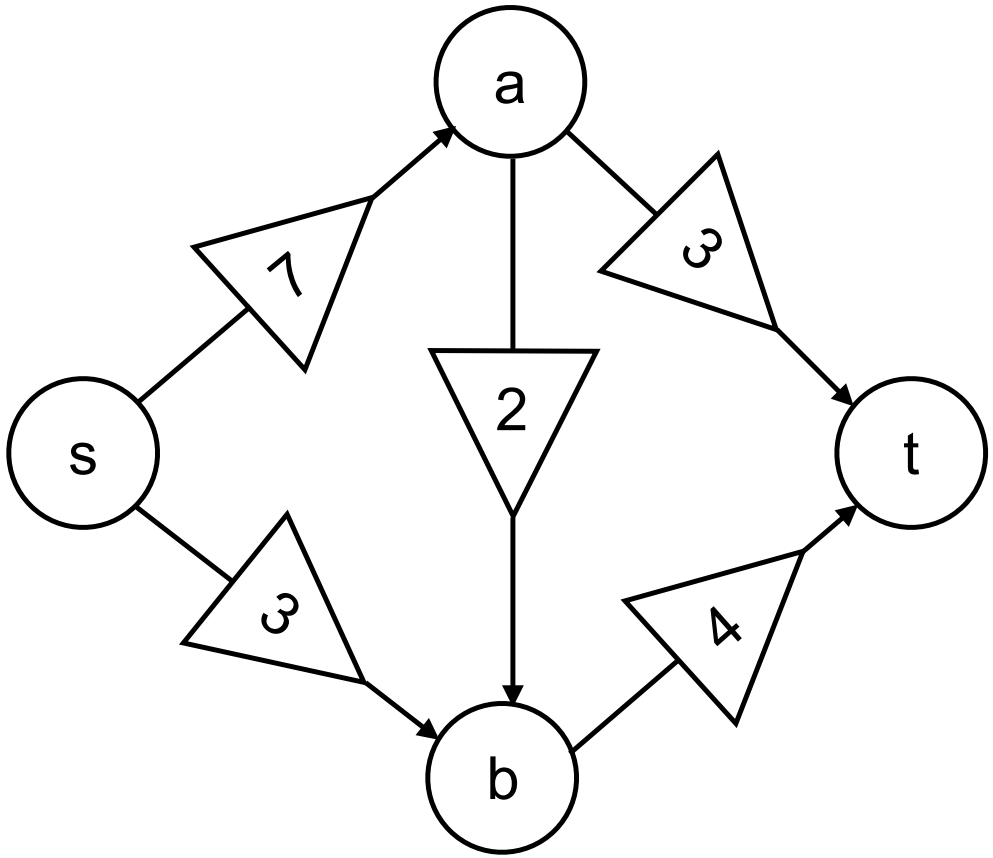
IV. Flot maximal avec bornes inférieures et supérieures

Exemple de détermination d'un flot réalisable initial sur G.



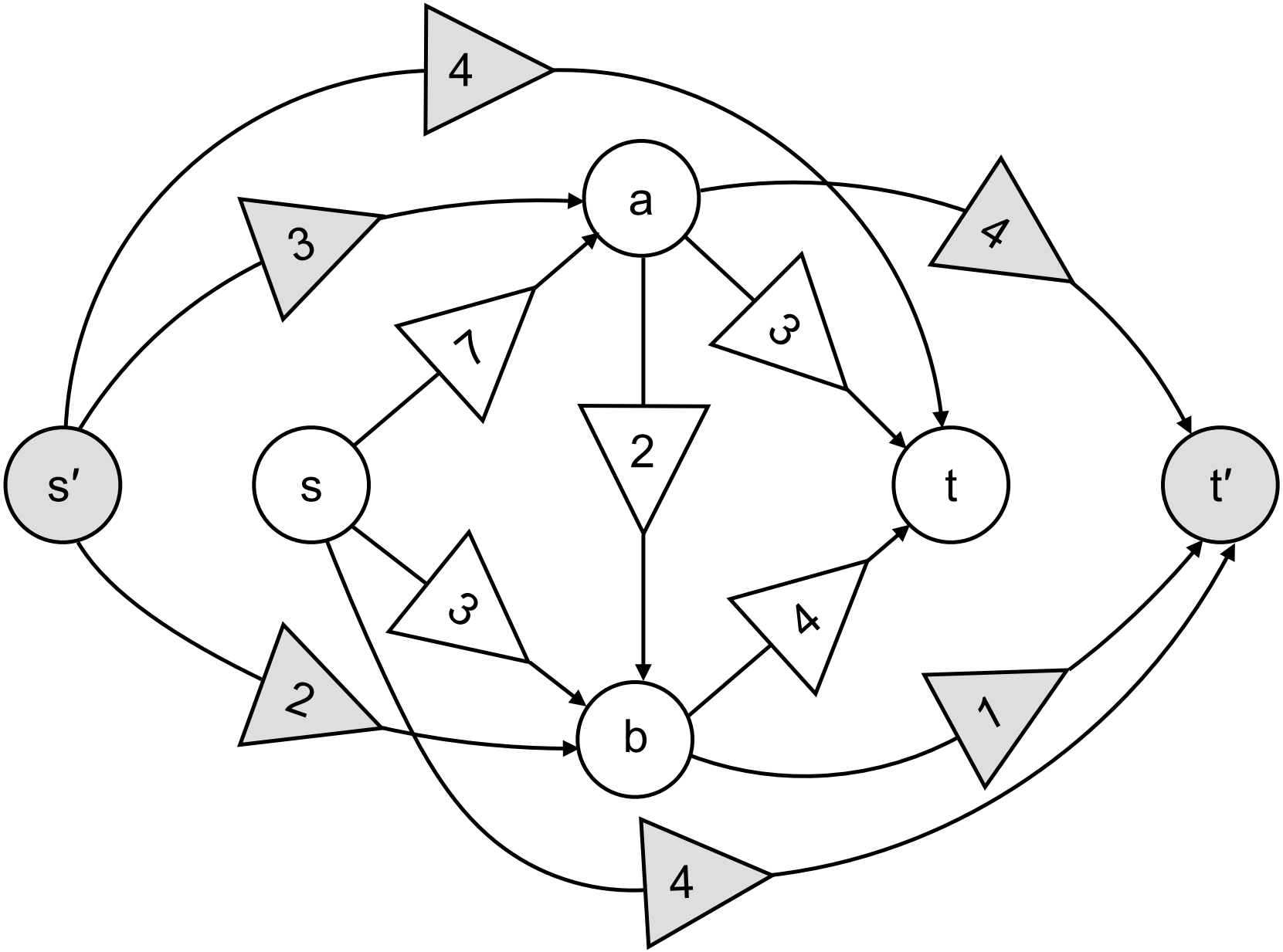
IV. Flot maximal avec bornes inférieures et supérieures

a) Graphe auxiliaire G' :



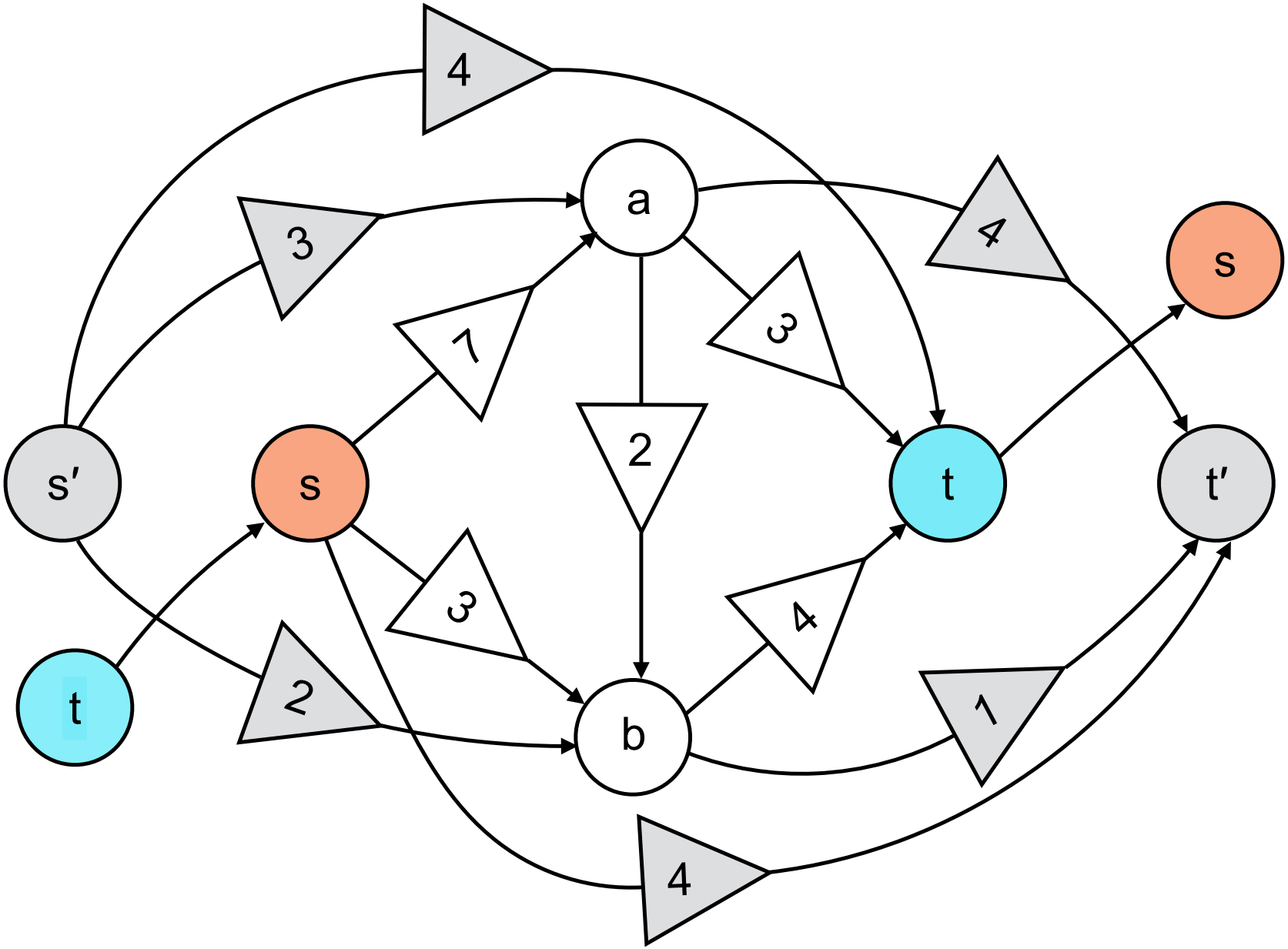
IV. Flot maximal avec bornes inférieures et supérieures

a) Graphe auxiliaire G' :



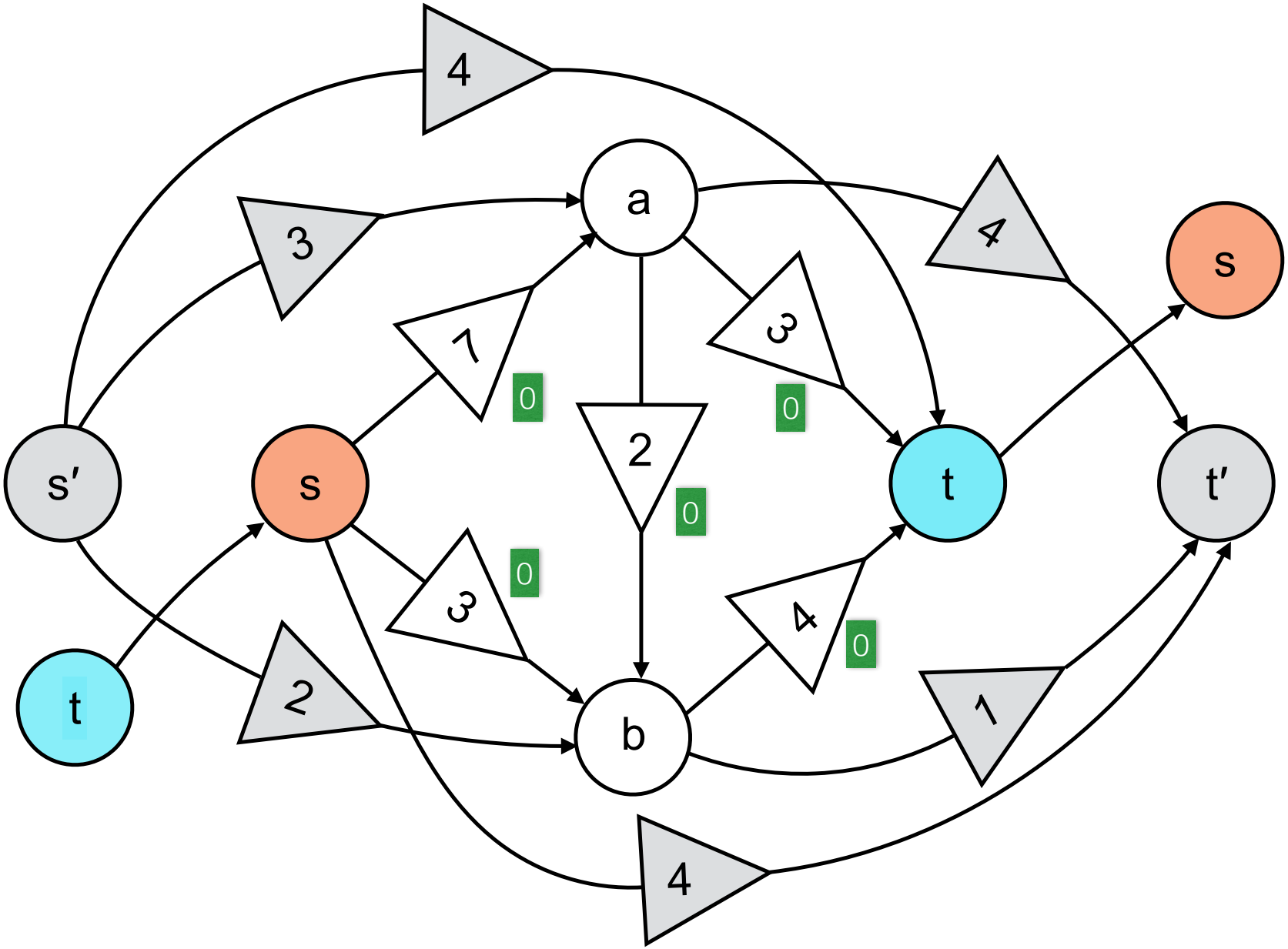
IV. Flot maximal avec bornes inférieures et supérieures

a) Graphe auxiliaire G' :



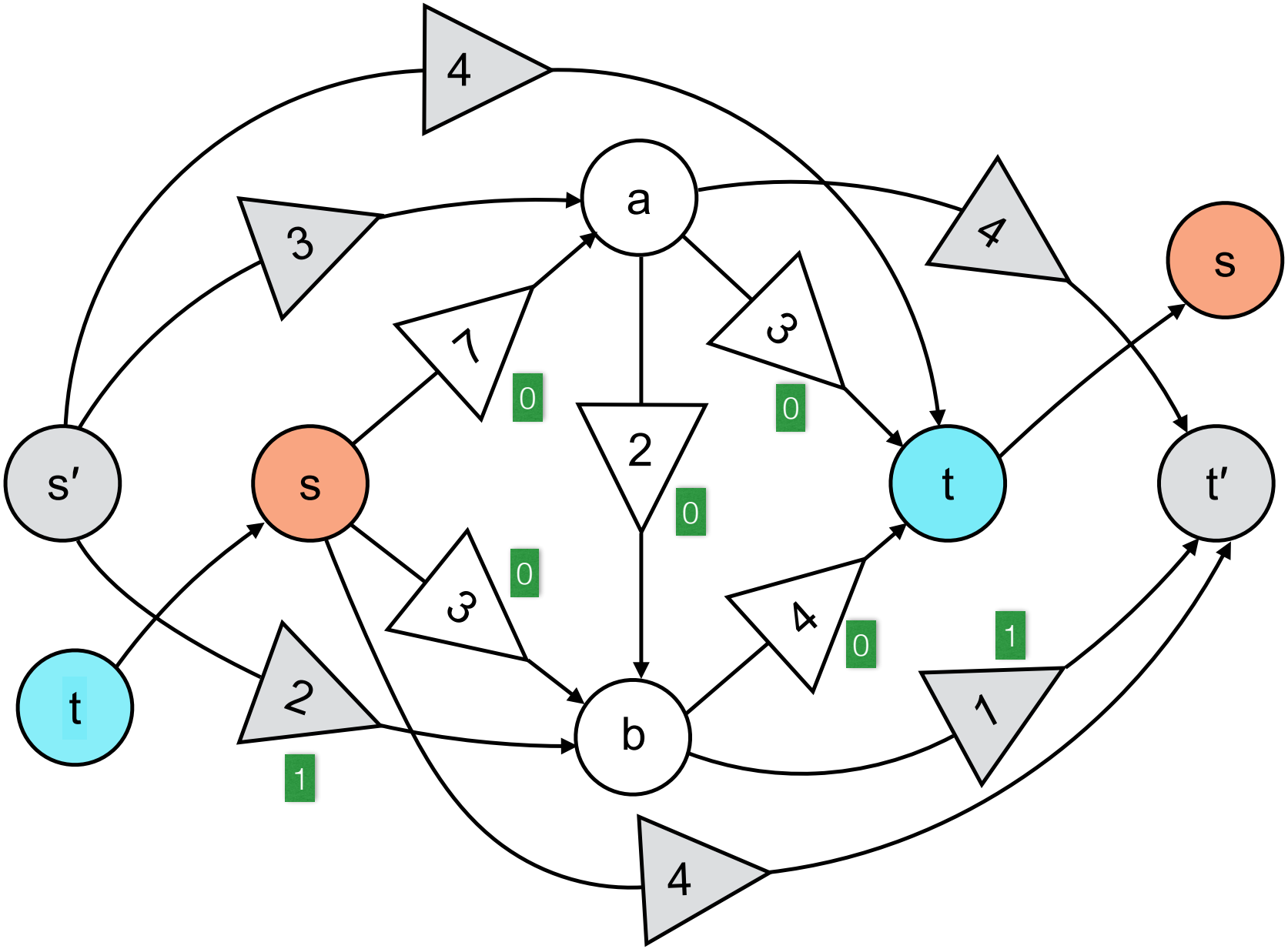
IV. Flot maximal avec bornes inférieures et supérieures

b) Flot réalisable initial sur G' :



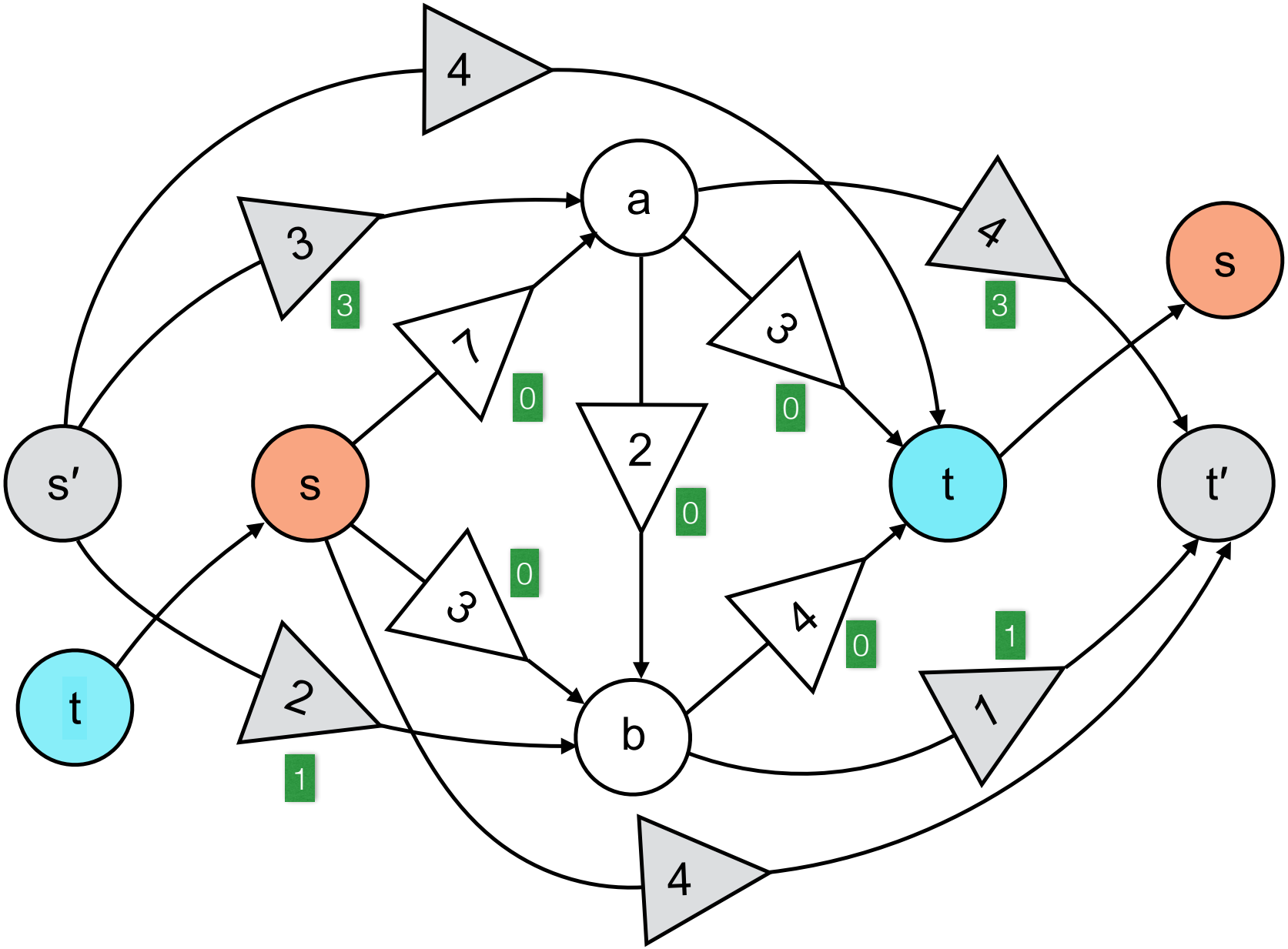
IV. Flot maximal avec bornes inférieures et supérieures

b) Flot réalisable initial sur G' :



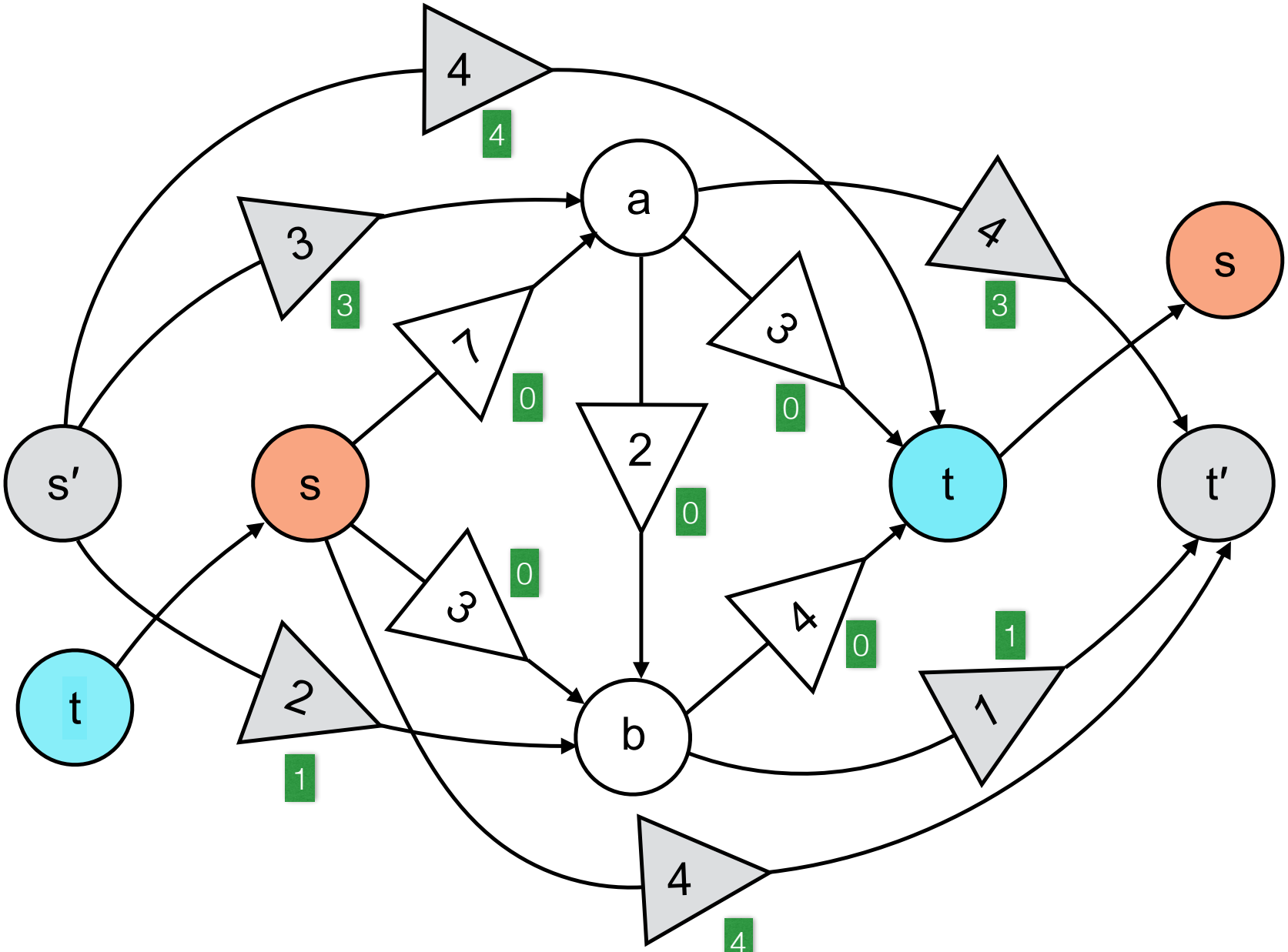
IV. Flot maximal avec bornes inférieures et supérieures

b) Flot réalisable initial sur G' :



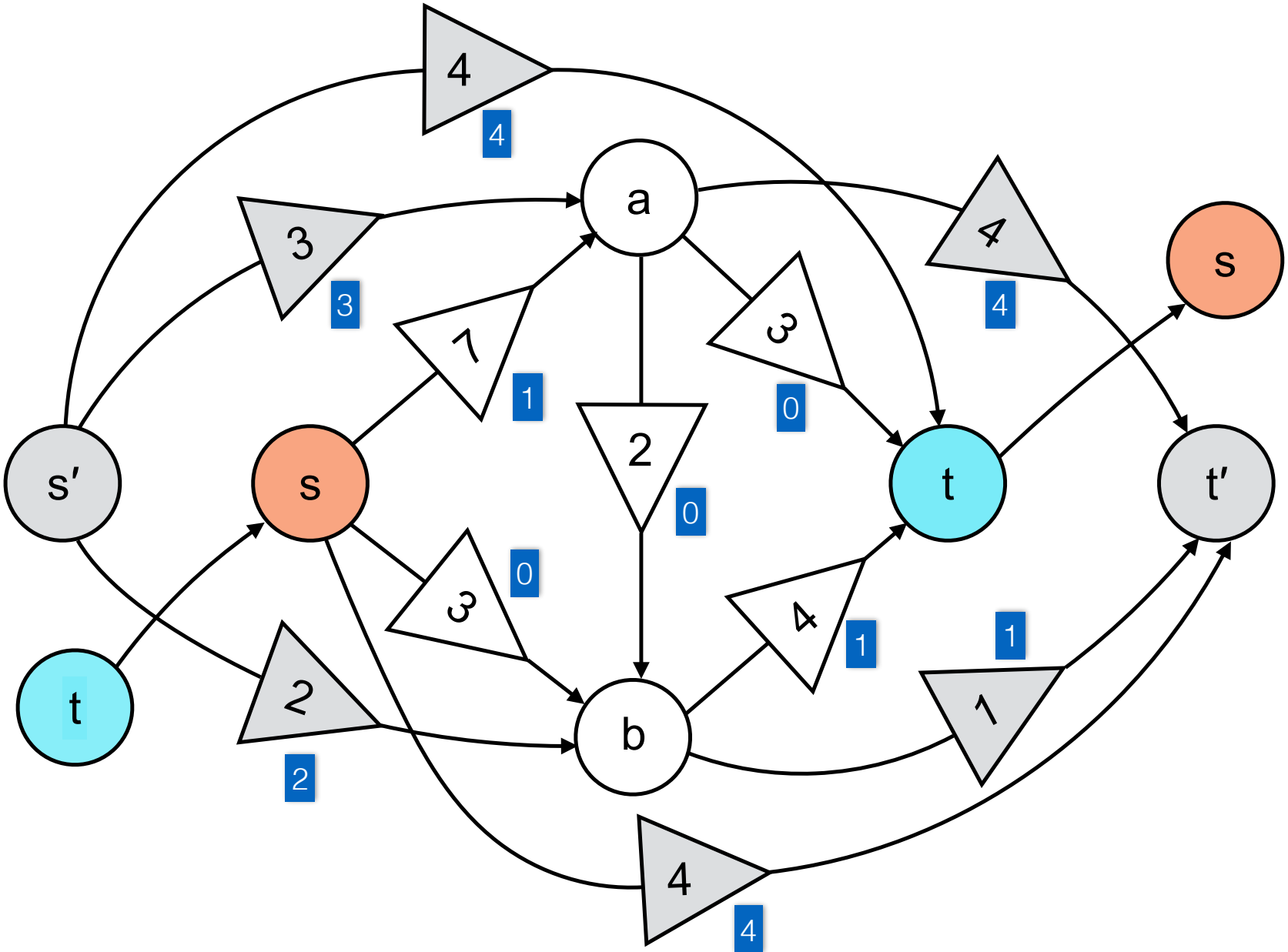
IV. Flot maximal avec bornes inférieures et supérieures

b) Flot réalisable initial sur G' :



IV. Flot maximal avec bornes inférieures et supérieures

c) Flot maximal sur G' (Ford-Fulkerson) :



IV. Flot maximal avec bornes inférieures et supérieures

d) Flot réalisable sur G :