Exercice 1.

On intègre l'équation (1) sur $K_i =]x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}[$.
On obtient

$$(1a) \quad \frac{d}{dt} u_i(t) + \frac{c}{h_i}\left[u(x_{i+\frac{1}{2}}, t) - u(x_{i-\frac{1}{2}}, t)\right] = f_i(t)$$

pour tout $t > 0$.

avec $u_i(t) = \frac{1}{h_i}\int_{K_i} u(x,t)\,dx$ valeur moyenne de u sur K_i

et $f_i(t) = \frac{1}{h_i}\int_{K_i} f(x,t)\,dx$.

On écrit (a) en $t = t^n$:

$$\frac{d}{dt} u_i(t^n) + \frac{c}{h_i}\left[u(x_{i+\frac{1}{2}}, t^n) - u(x_{i-\frac{1}{2}}, t^n)\right] = f_i(t^n)$$

<u>Approximations</u> : $u_i^n \simeq \frac{1}{h_i}\int_{K_i} u(x,t^n)\,dx = u_i(t^n)$

- $\frac{d}{dt} u_i(t^n) \simeq \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}$
- $c\,u(x_{i+\frac{1}{2}}, t^n) \simeq \phi_{i+\frac{1}{2}}^n$ flux numérique.

Le schéma Volumes Finis s'écrit :

$$(1b) \quad \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{1}{h_i}\left(\phi_{i+\frac{1}{2}}^n - \phi_{i-\frac{1}{2}}^n\right) = f_i^n = f_i(t^n)$$

Le choix du flux numérique se fait par <u>décentrement</u> :

$$\phi_{i+\frac{1}{2}}^n = \begin{cases} c\, u_i^n & \text{si } c>0 \\ c\, u_{i+1}^n & \text{si } c<0. \end{cases}$$

que l'on peut encore écrire

$$\phi_{i+\frac{1}{2}}^n = c^+ u_i^n + c^- u_{i+1}^n$$

avec $c^+ = \max(c,0)$ (partie positive)
$c^- = \min(c,0)$ (partie négative)

→ Avec $\underline{c>0}$, le schéma VF s'écrit

$$(VF) \quad \boxed{\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c\, \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h_i} = f_i^n}$$

$\forall i \in \mathbb{Z}$, $0 \leq n \leq N-1$. et $u_i^0 = \frac{1}{h_i} \int_{K_i} u_0(x)\,dx$

2) <u>Stabilité</u> On prend $f \equiv 0$, et $c\Delta t \leq \alpha h$

Par récurrence sur $\underline{n}$. $(\mathcal{P}_n)$: $\inf(u_0) \leq u_i^n \leq \sup(u_0)$

. <u>Pour $n=0$</u> :

$$\underset{\underset{\inf(u_0)}{\shortparallel}}{\inf(u_0)\frac{h_i}{h_i}} \leq u_i^0 = \frac{1}{h_i}\int_{K_i} u_0(x)\,dx \leq \underset{\underset{\sup(u_0)}{\shortparallel}}{\frac{h_i}{h_i}\sup(u_0)}$$

donc $(\mathcal{P}_0)$ vraie.

• Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie.

On a $u_i^{n+1} = \left(1 - \frac{c\Delta t}{h_i}\right) u_i^n + \frac{c\Delta t}{h_i} u_{i-1}^n$

$\forall i \in \mathbb{Z}$, $\alpha h \leq h_i \leq \beta h$.

$$\rightarrow 0 \leq 1 - \frac{c\Delta t}{\alpha h} \leq 1 - \frac{c\Delta t}{h_i} \leq 1 - \frac{c\Delta t}{\beta h}$$

par hypothèse sur Δt et h.

Donc $1 - \frac{c\Delta t}{h_i} \geq 0$, $\forall i \in \mathbb{Z}$.

$$\rightsquigarrow u_i^{n+1} \leq \left(1 - c\frac{\Delta t}{h_i}\right) \sup(u_0) + \frac{c\Delta t}{h_i} \sup(u_0)$$

car $(\mathcal{P}_n)$ vraie

$$= \sup(u_0)$$

On montre de même $u_i^{n+1} \geq \inf(u_0)$

donc $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie

Conclusion: $\forall n$, $\forall i \in \mathbb{Z}$, $\inf(u_0) \leq u_i^n \leq \sup(u_0)$

3) a) Soit l'erreur $e_i^n = u(x_{i+\frac{1}{2}}, t^n) - u_i^n$

On a $\frac{\partial u}{\partial t}(x_{i+\frac{1}{2}}, t^n) + c\frac{\partial u}{\partial x}(x_{i+\frac{1}{2}}, t^n) = f(x_{i+\frac{1}{2}}, t^n)$

(1.c)

Approximation de $\frac{\partial u}{\partial t}(x_{i+\frac{1}{2}}, t^n)$

Par Taylor

$$u(x_{i+\frac{1}{2}}, t^{n+1}) = u(x_{i+\frac{1}{2}}, t^n) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x_{i+\frac{1}{2}}, t^n) + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_{i+\frac{1}{2}}, \theta^n)$$

avec $\theta^n \in]t^n, t^{n+1}[$.

$$\rightsquigarrow \frac{\partial u}{\partial t}(x_{i+\frac{1}{2}}, t^n) = \frac{u(x_{i+\frac{1}{2}}, t^{n+1}) - u(x_{i+\frac{1}{2}}, t^n)}{\Delta t} - R_i^n \quad (1.d)$$

avec $R_i^n = \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_{i+\frac{1}{2}}, \theta^n)$

$$|R_i^n| \leq \frac{\Delta t}{2} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times]0,T[)}$$

Approximation de $\frac{\partial u}{\partial x}(x_{i+\frac{1}{2}}, t^n)$

De même, on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_{i+\frac{1}{2}}, t^n) = \frac{u(x_{i+\frac{1}{2}}, t^n) - u(x_{i-\frac{1}{2}}, t^n)}{h_i} - S_i^n$$

(1.e)

avec $S_i^n = -\frac{h_i}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\eta_i, t^n)$ avec $\eta_i \in]x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}[$

$$|S_i^n| \leq \frac{h_i}{2} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times]0,T[)}$$

La relation (1.c) avec (1.d) et (1.e) donne :

$$\frac{u(x_{i+\frac{1}{2}}, t^{n+1}) - u(x_{i+\frac{1}{2}}, t^n)}{\Delta t} + c\,\frac{u(x_{i+\frac{1}{2}}, t^n) - u(x_{i-\frac{1}{2}}, t^n)}{h_i}$$

$$= f(x_{i+\frac{1}{2}}, t^n) + (R_i^n + S_i^n)$$

En faisant la différence avec le schéma (VF), on obtient.

$$\frac{e_i^{n+1} - e_i^n}{\Delta t} + c\,\frac{e_i^n - e_{i-1}^n}{h_i} = \overbrace{f(x_{i+\frac{1}{2}}, t^n) - f_i^n}^{T_i^n}$$

$$+ (R_i^n + S_i^n)$$

On pose $T_i^n = f(x_{i+\frac{1}{2}}, t^n) - f_i^n$

$$= f(x_{i+\frac{1}{2}}, t^n) - \frac{1}{h_i}\int_{K_i} f(x, t^n)\,dx.$$

Par Taylor

$$f(x, t^n) = f(x_{i+\frac{1}{2}}, t^n) + (x - x_{i+\frac{1}{2}})\frac{\partial f}{\partial x}(\theta_x, t^n)$$

$$\rightsquigarrow \quad f_i^n = \frac{1}{h_i}\int_{K_i} f(x, t^n)\,dx = f(x_{i+\frac{1}{2}}, t^n)$$

$$+ \frac{1}{h_i}\int_{K_i}(x - x_{i+\frac{1}{2}})\,\frac{\partial f}{\partial x}(\theta_x, t^n)\,dx$$

$$\rightsquigarrow \quad |T_i^n| \leqslant \frac{1}{h_i}\left\|\frac{\partial f}{\partial x}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}\times]0,T[)} \underbrace{\int_{K_i}\underbrace{(x - x_{i+\frac{1}{2}})}_{\leqslant h_i}\,dx}_{\leqslant h_i^2}$$

donc $\quad |T_i^n| \leqslant h_i \left\|\frac{\partial f}{\partial x}\right\|_\infty$

On obtient ainsi

$$e_i^{n+1} = \left(1 - c\frac{\Delta t}{h_i}\right) e_i^n + c\frac{\Delta t}{h_i} e_{i-1}^n + \Delta t\left(R_i^n + S_i^n + T_i^n\right)$$

3) b) Sous l'hypothèse $c\Delta t \leq \alpha h$, on a

$$1 - c\frac{\Delta t}{h_i} \geq 0, \forall i \in \mathbb{Z}.$$

Donc $\forall i \in \mathbb{Z}$.

$$|e_i^{n+1}| \leq \left(1 - c\frac{\Delta t}{h_i}\right) \|e^n\|_\infty + c\frac{\Delta t}{h_i}\|e^n\|_\infty$$
$$+ \Delta t\left(\frac{\Delta t}{2}\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right\|_{L^\infty} + \frac{h_i}{2}\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\|_{L^\infty} + h_i\left\|\frac{\partial f}{\partial x}\right\|_{L^\infty}\right)$$

où on a noté

$$\|e^n\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{Z}} |e_i^n|$$

On obtient ainsi $\forall i \in \mathbb{Z}$

$$|e_i^{n+1}| \leq \|e^n\|_\infty + C\Delta t(h + \Delta t)$$

où $C > 0$ est indep. de Δt et h_i

$$C = \max\left(\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right\|_\infty, \frac{\beta}{2}\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\|_{L^\infty}, \beta\|f_x\|_\infty\right)$$

Donc $\sup_{i\in\mathbb{Z}} |e_i^{n+1}| \leq \sup_{i\in\mathbb{Z}} |e_i^n| + C\Delta t(h + \Delta t)$

On en déduit :

$$\sup_{i\in\mathbb{Z}} |e_i^n| \leqslant \sup_{i\in\mathbb{Z}} |e_i^0| + C \underbrace{n\Delta t}_{\leqslant T} (\Delta t + h)$$

$$e_i^0 = u_0(x_{i+\frac{1}{2}}) - u_i^0$$

$$= u_0(x_{i+\frac{1}{2}}) - \frac{1}{h_i}\int_{K_i} u_0(x)\,dx$$

$$= \mathcal{O}(h)$$

Finalement, on obtient :

$$\sup_{i\in\mathbb{Z}} |e_i^n| \leqslant C_1(\Delta t + h).$$

indép. de Δt et h.

c'est-à-dire

$$\sup_{i\in\mathbb{Z}} |u(x_{i+\frac{1}{2}}, t^n) - u_i^n| \leqslant C_1(\Delta t + h)$$

3) c). On a

$$|u(x_i, t^n) - u_i^n| = |u(x_i, t^n) - u(x_{i+\frac{1}{2}}, t^n) + e_i^n|$$

et $|u(x_{i+\frac{1}{2}}, t^n) - u(x_i, t^n)| \leqslant h_i \left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_\infty$

$$\leqslant \beta h \left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_\infty.$$

$$\Rightarrow \boxed{\sup_{i\in\mathbb{Z}} |u(x_i, t^n) - u_i^n| \leqslant C_2(h + \Delta t)}$$

$C_2 > 0$ indép. de Δt et h.