Exercice 2

1°) On a $u^{k+1} = M u^k$

avec $M = (I_N - \nu \Delta t A)$

On a $\|u^{k+1}\|_\infty = \|M u^k\|_\infty$.

$$\leq \underbrace{\|M\|_\infty}_{\text{norme matricielle}} \|u^k\|_\infty . \quad (*)$$

Rappel : Norme matricielle subordonnée à une norme vectorielle.

$$\underbrace{\|M\|_\infty}_{\text{norme matricielle}} = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^N \\ x \neq 0}} \frac{\|Mx\|_\infty}{\|x\|_\infty}$$

normes vectorielles

On montre que $\|M\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq N} \sum_{j=1}^{N} |M_{ij}|$

On déduit de $(*)$:

$$\|u^k\| \leq \|M\|_\infty^k \|u^0\|_\infty$$

$$\boxed{\text{Si } \underbrace{\|M\|_\infty \leq 1}_{\text{condition de stabilité}} \text{ alors } \|u^k\| \leq \|u^0\|_\infty .}$$

2) Calcul de $\|M\|_\infty$

$$\|M\|_\infty = \max_{1\leq i\leq N} \sum_{j=1}^{N} |M_{ij}|$$

terme diagonale de M

$$= \max_i \left(\left| 1 - \frac{\gamma \Delta t}{|K_i|} \sum_{e=(K_i|K_j)} \frac{|e_{K_iK_j}|}{|x_{K_i}-x_{K_j}|} \right| + \frac{\gamma \Delta t}{|K_i|} \sum_{e=(K_i|K_j)} \frac{|e_{K_iK_j}|}{|x_{K_i}-x_{K_j}|} \right)$$

la somme des termes hors diagonale

On veut $\|M\|_\infty \leq 1$. Pour $1\leq i\leq N$, on veut

$$\left| 1 - \frac{\gamma \Delta t}{|K_i|} \sum_{e=(K_i|K_j)} \frac{|e|}{|x_{K_i}-x_{K_j}|} \right| + \frac{\gamma \Delta t}{|K_i|} \sum_{e=(K_i|K_j)} \frac{|e|}{|x_{K_i}-x_{K_j}|}$$

$$\leq 1.$$

c'est à dire

$$\left| 1 - \frac{\gamma \Delta t}{|K_i|} \sum_{e=(K_i|K_j)} \frac{|e|}{|x_{K_i}-x_{K_j}|} \right| \leq 1 - \frac{\gamma \Delta t}{|K_i|} \sum_{e=(K_i|K_j)} \frac{|e|}{|x_{K_i}-x_{K_j}|}$$

c'est équivalent à

$$1 - \frac{\gamma \Delta t}{|K_i|} \sum_{e} \frac{|e|}{|x_{K_i} - x_{K_j}|} \geq 0 \quad \forall i$$

soit encore

$$\boxed{\gamma \Delta t \max_{1 \leq i \leq N} \frac{1}{|K_i|} \sum_{e=(K_i|K_j)} \frac{|e|}{|x_{K_i} - x_{K_j}|} \leq 1}$$