Exercices I : équations elliptiques

Exercice 1. *Volumes Finis 1D*

On considère le problème elliptique 1D

$$(P)\begin{cases} -u''(x) = f(x), & x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

pour lequel la méthode de Volumes Finis conduit au système linéaire

$$A\mathbf{u} = \mathbf{b} \tag{1}$$

dont les inconnues $\mathbf{u} = (u_1, \cdots, u_N)^\top$ représentent les approximations de la solution exacte u de (P) aux points $x_1, \cdots, x_N$ (voir cours). On note $\mathbf{b} = (b_1, \cdots, b_N)^\top$ avec $b_i = h_i f_i$ et la matrice A de taille $N \times N$ vaut

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \beta_{N-2} & \alpha_{N-1} & \beta_{N-1} \\ 0 & & & \beta_{N-1} & \alpha_N \end{pmatrix} \tag{2}$$

avec

$$\alpha_i = \frac{1}{h_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{1}{h_{i-\frac{1}{2}}}, \quad \beta_i = -\frac{1}{h_{i+\frac{1}{2}}},$$

où

$$h_i = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}, \quad h_{i+\frac{1}{2}} = x_{i+1} - x_i.$$

On notera $h = \max_i(h_{i+\frac{1}{2}})$. Le but de cet exercice est d'obtenir un résultat d'estimations d'erreurs de la méthode des Volumes Finis pour (P) en fonction de h.

On suppose que $f \in C([0,1])$ et $u \in C^2([0,1])$ est l'unique solution de (P).

1. Montrer que le système (1) admet une unique solution $\mathbf{u}$.
2. Montrer que la solution u de (P) vérifie, pour tout $i = 1, \cdots, N$,

$$-\frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{u(x_i) - u(x_{i-1})}{h_{i-\frac{1}{2}}} = h_i f_i - R_{i+\frac{1}{2}} + R_{i-\frac{1}{2}} \tag{3}$$

   avec $|R_{i+\frac{1}{2}}| \leq h_{i+\frac{1}{2}} \|u''\|_\infty$ et $|R_{i-\frac{1}{2}}| \leq h_{i-\frac{1}{2}} \|u''\|_\infty$.
3. On note l'erreur $e_i = u(x_i) - u_i$ pour $1 \leq i \leq N$ et $e_0 = e_{N+1} = 0$. Montrer que les e_i vérifient

$$-\frac{(e_{i+1} - e_i)}{h_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{(e_i - e_{i-1})}{h_{i-\frac{1}{2}}} = -R_{i+\frac{1}{2}} + R_{i-\frac{1}{2}} \tag{4}$$

   pour tout $1 \leq i \leq N$

4. En multipliant l'équation (4) par e_i et en sommant sur i, montrer que

$$\sum_{i=0}^{N} \frac{(e_{i+1}-e_i)^2}{h_{i+\frac{1}{2}}} = \sum_{i=0}^{N} R_{i+\frac{1}{2}}(e_{i+1}-e_i).$$

En déduire qu'il existe une constante $C > 0$ indépendante de h telle que

$$\sum_{i=0}^{N} \frac{(e_{i+1}-e_i)^2}{h_{i+\frac{1}{2}}} \leq C^2h^2. \tag{5}$$

5. Pour tout $i = 1, \cdots, N$, montrer que $|e_i| \leq \sum_{j=0}^{N} |e_{j+1}-e_j|$ et en déduire que

$$|e_i| \leq Ch. \tag{6}$$

Exercice 2. *Volumes Finis 1D pour un problème elliptique avec coefficients discontinus*

On veut construire un schéma "volumes finis" pour une équation elliptique en dimension 1 avec des coefficients discontinus. Les points de discontinuités ne coïncident pas nécessairement avec des points du maillage. On se donne la fonction β définie dans l'intervalle $[0,1]$ et constante par morceaux :

$$\beta(x) = \begin{cases} \beta^+ & \text{si } x > \alpha \\ \beta^- & \text{si } x < \alpha, \end{cases} \tag{1}$$

où $\alpha \in]0,1[$ et β^+, β^- sont deux constantes strictement positives. Pour une fonction f régulière dans $[0,1]$, on considère le problème suivant

$$\begin{aligned} &-(\beta u_x)_x = f \qquad \text{dans } [0,1] \\ &u(0) = u(1) = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Le problème (1),(2) admet une unique solution faible $u \in H_0^1(0,1)$ i.e. telle que $\int_0^1 \beta u_x v_x \, dx = \int_0^1 f v \, dx$ pour tout $v \in H_0^1(0,1)$. On remarquera en particulier que la solution u est continue dans $[0,1]$.

On considère les points de discrétisation suivants de l'intervalle $[0,1]$:

$$0 = x_0 = x_{\frac{1}{2}} < x_1 < \cdots < x_{i-\frac{1}{2}} < x_i < x_{i+\frac{1}{2}} < x_{i+1} < \cdots < x_{N+\frac{1}{2}} = x_{N+1} = 1$$

et on introduit les N cellules $K_i =]x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}[$ auxquelles sont associés les centres x_i, pour $i = 1, \cdots, N$. On note

$$\begin{aligned} &h_i = |K_i| = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}} \\ &h^-_{i+\frac{1}{2}} = x_{i+\frac{1}{2}} - x_i > 0, \quad h^+_{i+\frac{1}{2}} = x_{i+1} - x_{i+\frac{1}{2}} > 0. \end{aligned}$$

On suppose que le maillage respecte la discontinuité de la fonction β c'est-à-dire qu'il existe k tel que

$$\alpha = x_{k+\frac{1}{2}}. \tag{3}$$

Enfin, pour une fonction v donnée, on note (quand la limite existe)

$$v(\delta^-) = \lim_{\substack{x\to\delta \\ x<\delta}} v(x), \quad v(\delta^+) = \lim_{\substack{x\to\delta \\ x>\delta}} v(x).$$

1. Montrer que la solution u de (1),(2) est régulière dans chacun des sous-intervalles $[0,\alpha[$ et $]\alpha,1]$ et qu'elle vérifie

$$\begin{aligned} -\beta u_{xx} &= f \quad \text{dans } [0,\alpha[\cup]\alpha,1] & (4)\\ [\beta u_x] \equiv \beta^+ u_x(\alpha^+) - \beta^- u_x(\alpha^-) &= 0. & (5)\end{aligned}$$

   Que vaut $[\beta u_{xx}]$?

2. Pour $1 \leq i \leq N$, montrer que (y compris pour $i = k$)

$$-\beta(x^-_{i+\frac{1}{2}})u_x(x^-_{i+\frac{1}{2}}) + \beta(x^+_{i-\frac{1}{2}})u_x(x^+_{i-\frac{1}{2}}) = h_i f_i \tag{6}$$

   où $f_i = \frac{1}{|K_i|}\int_{K_i} f(x)dx$.

3. Soit $F^-_{i+\frac{1}{2}}$ et $F^+_{i+\frac{1}{2}}$ les flux numériques associés respectivement aux cellules K_i et K_{i+1}, obtenus en approchant respectivement les flux $-\beta(x^-_{i+\frac{1}{2}})u_x(x^-_{i+\frac{1}{2}})$ et $-\beta(x^+_{i+\frac{1}{2}})u_x(x^+_{i+\frac{1}{2}})$ par différences décentrées :

$$F^-_{i+\frac{1}{2}} = -\beta(x^-_{i+\frac{1}{2}})\frac{(u_{i+\frac{1}{2}} - u_i)}{h^-_{i+\frac{1}{2}}}, \quad F^+_{i+\frac{1}{2}} = -\beta(x^+_{i+\frac{1}{2}})\frac{(u_{i+1} - u_{i+\frac{1}{2}})}{h^+_{i+\frac{1}{2}}}. \tag{7}$$

   Le schéma "Volumes Finis" associé à (6) s'écrit alors

$$F^-_{i+\frac{1}{2}} - F^+_{i-\frac{1}{2}} = h_i f_i, \quad 1 \leq i \leq N. \tag{8}$$

   En imposant la conservation des flux numériques (analogue discret de (5)), montrer que, pour $1 \leq i \leq N$

$$F_{i+\frac{1}{2}} := F^-_{i+\frac{1}{2}} = F^+_{i+\frac{1}{2}} = -\beta^*_{i+\frac{1}{2}}\left(\frac{u_{i+1} - u_i}{x_{i+1} - x_i}\right), \tag{9}$$

   en précisant ce que vaut $\beta^*_{i+\frac{1}{2}}$. Montrer en particulier, pour $i = k$, que

$$\frac{1}{\beta^*_{k+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{h^+_{k+\frac{1}{2}} + h^-_{k+\frac{1}{2}}}\left(\frac{h^+_{k+\frac{1}{2}}}{\beta^+} + \frac{h^-_{k+\frac{1}{2}}}{\beta^-}\right),$$

   c'est-à-dire que $\beta^*_{k+\frac{1}{2}}$ est la moyenne harmonique de β^+ et β^- pondérée par $h^+_{k+\frac{1}{2}}$ et $h^-_{k+\frac{1}{2}}$.

4. Ecrire le système linéaire $A\mathbf{u} = \mathbf{b}$ résultant du schéma "Volumes Finis" (8),(9).

Exercice 3. *Estimations d'erreurs pour l'équation de Laplace 2D*

L'objectif de cet exercice est d'établir des estimations d'erreurs pour le schéma Volumes Finis associé à l'équation de Poisson 2D. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine polygonal et $f \in L^2(\Omega)$. On considère la solution u de

$$(P)\begin{cases} -\Delta u &= f \quad \text{dans } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

et on suppose que $u \in C^2(\overline{\Omega})$. On introduit $\mathcal{T}$ un maillage admissible de Ω (au sens des volumes Finis) et on suppose en plus que $d_e \neq 0$, $\forall e \in \mathcal{E}$ (cf. cours). Le schéma de Volumes Finis s'écrit alors :

$$\sum_{e\in\mathcal{E}_K} F_{K,e} = |K| f_K, \quad \forall K \in \mathcal{T}$$

$$\text{avec } F_{K,e} = \begin{cases} -\dfrac{|e|}{d_e}(u_L - u_K) & \text{si } e = K|L \in \mathcal{E}_{\text{int}} \\ \dfrac{|e|}{d_e} u_K & \text{si } e \in \mathcal{E}_{\text{ext}} \cap \mathcal{E}_K. \end{cases} \tag{1}$$

Pour $K \in \mathcal{T}$ et $e \in \mathcal{E}_K$, on note $\overline{F}_{K,e} = -\displaystyle\int_e \nabla u \cdot \mathbf{n}_{K,e}\, d\Gamma$ et

$$F^*_{K,e} = \begin{cases} -\dfrac{|e|}{d_e}(u(\mathbf{x}_L) - u(\mathbf{x}_K)) & \text{si } e = K|L \in \mathcal{E}_{\text{int}} \\ \dfrac{|e|}{d_e} u(\mathbf{x}_K) & \text{si } e \in \mathcal{E}_{\text{ext}} \cap \mathcal{E}_K. \end{cases} \tag{2}$$

1. Soit $R_{K,e}$ l'erreur de consistance des flux définie par $R_{K,e} = \dfrac{1}{|e|}(\overline{F}_{K,e} - F^*_{K,e})$.
   Pour tout $K \in \mathcal{T}$, $e \in \mathcal{E}_K$, montrer que $R_{K,e} = \mathcal{O}(h)$ où $h = \max_{K\in\mathcal{T}}(diam(K))$.

   Rappels : Formule de quadrature $\int_e F(\mathbf{x})\, d\Gamma = |e|F(\mathbf{x}_0) + |e|\mathcal{O}(|e|)$ avec $\mathbf{x}_0 \in e$.
   La dérivée normale est une dérivée directionnelle : $\nabla u \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \dfrac{d}{ds}[u(\mathbf{x} + s\mathbf{n})]_{s=0}$.
2. On note $\delta_K = u(\mathbf{x}_K) - u_K$ et

$$G_{K,e} = \begin{cases} -\dfrac{|e|}{d_e}(\delta_L - \delta_K) & \text{si } e = K|L \in \mathcal{E}_{\text{int}} \\ \dfrac{|e|}{d_e}\delta_K & \text{si } e \in \mathcal{E}_{\text{ext}} \cap \mathcal{E}_K. \end{cases} \tag{3}$$

   Montrer que

$$\sum_{e\in\mathcal{E}_K} G_{K,e} = -\sum_{e\in\mathcal{E}_K} |e| R_{K,e}, \quad \forall K \in \mathcal{T}. \tag{4}$$

3. On note $\delta_{\mathcal{T}}$ la fonction définie sur Ω, constante sur chaque cellule K avec $\delta_{\mathcal{T}}(\mathbf{x}) = \delta_K$ pour tout $\mathbf{x} \in K$. En réordonnant les sommes sur K et sur e, montrer que

$$\sum_{K\in\mathcal{T}} \sum_{e\in\mathcal{E}_K} G_{K,e}\delta_K = \sum_{e\in\mathcal{E}} \frac{|e|}{d_e}(D_e\delta_{\mathcal{T}})^2 =: \|\delta_{\mathcal{T}}\|^2_{1,\mathcal{T}}, \tag{5}$$

   où $D_e\delta_{\mathcal{T}} = \begin{cases} (\delta_K - \delta_L) & \text{si } e = K|L \in \mathcal{E}_{\text{int}} \\ \delta_K & \text{si } e \in \mathcal{E}_{\text{ext}} \cap \mathcal{E}_K. \end{cases}$
4. En utilisant la conservation des flux à travers les arêtes $e \in \mathcal{E}_{\text{int}}$, montrer que

$$\sum_{K\in\mathcal{T}} \sum_{e\in\mathcal{E}_K} |e| R_{K,e}\delta_K = \sum_{e\in\mathcal{E}} R_{K,e}\, D_e\delta_{\mathcal{T}}. \tag{6}$$

5. Déduire de ce qui précède qu'il existe une constante $C' > 0$ indépendante de h telle que

$$\|\delta_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}} \le C' h \left(\sum_{e\in\mathcal{E}} |e| d_e\right)^{1/2}. \tag{7}$$

   Calculer $\sum_{e\in\mathcal{E}} |e| d_e$ en fonction de $|\Omega|$ et en déduire qu'il existe $C > 0$ indépendante de h telle que

$$\|\delta_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}} \le Ch, \quad \|\delta_{\mathcal{T}}\|_{L^2(\Omega)} \le Ch. \tag{8}$$