Exercices II
Equations d'évolution

Exercice 1. *Convergence du schéma VF upwind explicite pour l'équation de transport.*

Soit $T > 0$. On considère l'équation de transport :

$$\begin{aligned} u_t(x,t) + cu_x(x,t) &= f, \quad x \in \mathbb{R}, t \in]0,T[, & (1)\\ u(x,0) &= u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, & (2) \end{aligned}$$

où $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$, $f \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ et $c > 0$. On se donne un pas de temps $\Delta t = T/N$ avec $N \in \mathbb{N}^*$, des points de discrétisation en temps $t^n = n\Delta t$ ainsi que des points de discrétisation en espace $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ et $(x_{i+\frac{1}{2}})_{i\in\mathbb{Z}}$ tels que

$$\cdots < x_{i-\frac{1}{2}} < x_i < x_{i+\frac{1}{2}} < x_{i+1} < \cdots$$

On désigne par K_i la cellule $K_i =]x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}[$, de centre x_i et on pose $h_i = |K_i| = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$, $h_{i+\frac{1}{2}} = x_{i+1} - x_i$. On suppose de plus qu'il existe $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $h > 0$ tels que

$$\alpha h \leq h_i \leq \beta h, \tag{3}$$

pour tout $i \in \mathbb{Z}$. On s'intéresse aux approximations $u_i^n \simeq \dfrac{1}{h_i}\int_{K_i} u(x,t^n)\,dx$. Le schéma VF *upwind* explicite s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h_i} &= f_i^n & (4)\\ u_i^0 &= \frac{1}{h_i}\int_{K_i} u_0(x)\,dx & (5) \end{aligned}$$

pour $i \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq n \leq N-1$, avec $f_i^n = \dfrac{1}{h_i}\int_{K_i} f(x,t^n)\,dx$

1. Retrouver la formulation "Volumes Finis" donnée par (4),(5).
2. (Stabilité) On choisit $f \equiv 0$. Sous la condition de stabilité $c\Delta t \leq \alpha h$, montrer que $\inf(u_0) \leq u_i^n \leq \sup(u_0)$, pour tout $i \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq n \leq N$.
3. (Convergence) On suppose que $c\Delta t \leq \alpha h$.
   (a) Soit $e_i^n = u(x_{i+\frac{1}{2}}, t^n) - u_i^n$. Montrer que les (e_i^n) vérifient

   $$e_i^{n+1} = \left(1 - c\frac{\Delta t}{h_i}\right) e_i^n + c\frac{\Delta t}{h_i} e_{i-1}^n + \Delta t R, \tag{6}$$

   pour $i \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq n \leq N-1$ et R est tel que

   $$|R| \leq C\left(\|\partial_{tt}^2 u\|_{L^\infty(\mathbb{R}\times(0,T))} + \|\partial_{xt}^2 u\|_{L^\infty(\mathbb{R}\times(0,T))}\right)(h + \Delta t)$$

   avec $C > 0$ indépendante de h et Δt.

(b) Montrer que

$$\sup_{i\in\mathbb{Z}} |e_i^{n+1}| \leq \sup_{i\in\mathbb{Z}} |e_i^n| + C\Delta t\,(h+\Delta t)\,, \tag{7}$$

où $C > 0$ est indépendante de h et Δt. En déduire que

$$\sup_{i\in\mathbb{Z}} |u(x_{i+\frac{1}{2}}, t^n) - u_i^n| \leq C_1(h+\Delta t),$$

pour tout $0 \leq n \leq N$ avec $C_1 > 0$ une constante indépendant de h et Δt.

(c) En déduire que :

$$\sup_{i\in\mathbb{Z}} |u(x_i, t^n) - u_i^n| \leq C_2(h+\Delta t),$$

pour tout $0 \leq n \leq N$ avec $C_2 > 0$ indépendant de h et Δt.

Exercice 2. *Condition de stabilité du schéma VF explicite pour l'équation de la chaleur 2D*

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine polygonal. Pour $T > 0$ et u_0 donnés, on considère l'équation de la chaleur suivante

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u &= 0 \quad \text{dans } \Omega\times]0,T[&& (1)\\ u &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega\times]0,T[&& (2)\\ u(\cdot,0) &= u_0 \quad \text{dans } \Omega. && (3) \end{aligned}$$

Le schéma "Volumes Finis" explicite s'écrit

$$\mathbf{u}^{k+1} = \big(I_N - \nu\Delta t A\big)\mathbf{u}^k, \tag{4}$$

où I_N est la matrice identité d'ordre N et les inconnues sont regroupées dans le vecteur $\mathbf{u}^k = (u_{K_1}^k, \cdots, u_{K_N}^k)^\top$. La matrice A est de taille $N\times N$ et elle est donnée par

$$\begin{array}{ccc}
 & \begin{array}{ccccccccc} & K & & & L_1 & & & L_2 & \end{array} & \\
A = & \left(\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \dfrac{1}{|K|}\displaystyle\sum_{e_{K,L}\in\mathcal{E}_K}\dfrac{|e_{K,L}|}{d_{K,L}} & \cdots & & -\dfrac{|e_{K,L_1}|}{|K|d_{K,L_1}} & & \cdots & -\dfrac{|e_{K,L_2}|}{|K|d_{K,L_2}} & \cdots \\
 & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & \\
\cdots & -\dfrac{|e_{L_1,K}|}{|L_1|d_{L_1,K}} & \cdots & & \dfrac{1}{|L_1|}\displaystyle\sum_{e_{L_1,L}\in\mathcal{E}_{L_1}}\dfrac{|e_{L_1,L}|}{d_{L_1,L}} & & \cdots & -\dfrac{|e_{L_1,L_2}|}{|L_1|d_{L_1,L_2}} & \cdots \\
 & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & \\
\cdots & -\dfrac{|e_{L_2,K}|}{|L_2|d_{L_2,K}} & \cdots & & -\dfrac{|e_{L_2,L_1}|}{|L_2|d_{L_2,L_1}} & & \cdots & \dfrac{\nu}{|L_2|}\displaystyle\sum_{e_{L_2,L}\in\mathcal{E}_{L_2}}\dfrac{|e_{L_2,L}|}{d_{L_2,L}} & \cdots
\end{array}\right) & \begin{array}{c} K \\ \\ \\ L_1 \\ \\ \\ L_2 \end{array}
\end{array}$$

On a noté $\mathcal{E}_K$ l'ensemble des arêtes de la cellule K et $e_{K,L} = (K|L) \not\subset \partial\Omega$ est l'arête commune aux cellules K et L et $d_{K,L} = |\mathbf{x}_K - \mathbf{x}_L|$. Les cellules L_1, L_2, $\cdots$ sont les cellules ayant une arête commune avec la cellule K.

1. Le schéma explicite (4) est *stable* si $\|\mathbf{u}^k\|_\infty \leq C$ pour tout $k \geq 0$ où $C > 0$ est une constante indépendante de k et N. Donner une condition sur la matrice $M = I_N - \nu\Delta t A$ pour que le schéma (4) soit stable.
2. En déduire la condition de stabilité du schéma explicite (4) :

$$\lambda = \nu\Delta t \max_{1\leq i\leq N}\left(\frac{1}{|K_i|}\sum_{\substack{e\in\mathcal{E}_{K_i}\\ e=(K_i|L)}}\frac{|e|}{|\mathbf{x}_{K_i}-\mathbf{x}_L|}\right) \leq 1. \tag{5}$$