TP1
Volumes Finis pour le Laplacien

Le but de ce TP est de résoudre l'équation de Poisson dans un domaine polygonal $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ par une méthode de Volumes Finis. On cherche une fonction $u = u(\mathbf{x})$ définie pour $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$, vérifiant

$$(P) \begin{cases} -\nu\Delta u &= f \quad \text{dans } \Omega \\ u &= g \quad \text{sur le bord } \partial\Omega \end{cases}$$

avec un paramètre $\nu > 0$ et les fonctions f et g donnés. On considère un maillage admissible au sens des Volumes Finis (cf. Cours),

$$\overline{\Omega} = \cup_K \overline{K}$$

où les volumes (ou cellules) de contrôles K sont des polygônes convexes qui forment une partition de Ω. Les volumes de contrôles K sont choisis comme étant les cellules de Voronoï associées à une triangulation de Delaunay du domaine Ω. A chaque volume K, on associe le centre $\mathbf{x}_K$ qui est le sommet des triangles intersectant K. On notera $\mathcal{E}_K$ l'ensemble des arêtes de la cellule K et $|e|$ désigne la longueur d'une arête e.

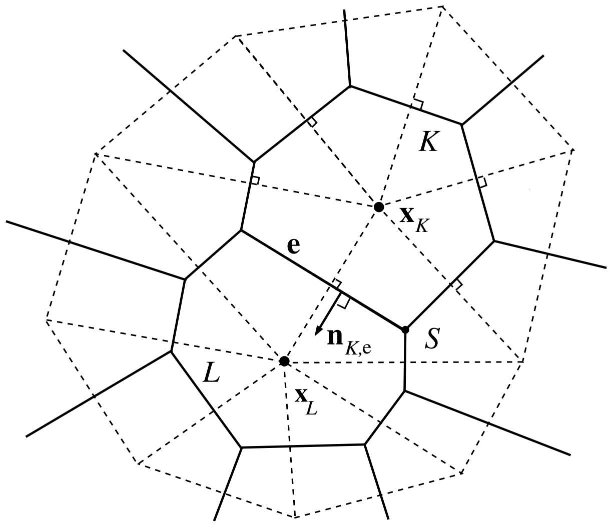


FIGURE 1 – Volumes de contrôle (Voronoï) et triangulation de Delaunay

1 Schéma Volumes Finis

Le schéma "Volumes Finis" permet de déterminer les approximations $u_K \simeq \dfrac{1}{|K|}\displaystyle\int_K u(\mathbf{x})d\mathbf{x}$, à partir des relations suivantes (cf. Cours) :

$$\sum_{\substack{e\in\mathcal{E}_K \\ e\not\subset\partial\Omega}} F_{K,e} = |K| f_K \quad \text{pour toute cellule } K \tag{1}$$

avec

$$f_K = \frac{1}{|K|}\int_K f(\mathbf{x})d\mathbf{x}. \tag{2}$$

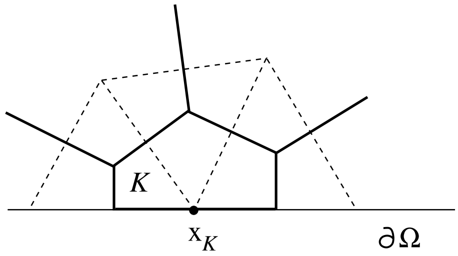


FIGURE 2 – Cellules du bord pour un maillage Voronoï

Pour l'arête $e = (K|L)$ commune aux deux volumes de contrôle K et L avec $e \not\subset \partial\Omega$, le flux numérique $F_{K,e}$ est défini par

$$F_{K,e} = \nu \frac{|e|}{d_{K,L}}(u_K - u_L) \qquad (e \not\subset \partial\Omega) \tag{3}$$

avec $d_{K,L} = |\mathbf{x}_K - \mathbf{x}_L|$. Dans le cas où une cellule K possède une arête e sur le bord $\partial\Omega$, on impose

$$u_K = u_e = \frac{1}{|e|}\int_e g(\mathbf{x})d\Gamma \quad \text{si } e \in \partial\Omega. \tag{4}$$

Remarque : Les intégrales dans (2) et (4) sont calculées par les formules de quadrature suivantes :

$$\int_K f(\mathbf{x})d\mathbf{x} \simeq |K| f(\mathbf{x}_K)$$
$$\int_e g(\mathbf{x})d\Gamma \simeq |e| g(\mathbf{x}_K) \;\text{ avec }\; \mathbf{x}_K \in e \subset \partial K \subset \partial\Omega$$

2 Système linéaire

Le système linéaire s'écrit $A\mathbf{u} = \mathbf{b}$ avec la matrice A de taille $N \times N$ où N est le nombre de volumes de contrôle *intérieurs* i.e. les volumes de contrôle qui ne possèdent pas d'arêtes appartenant au bord $\partial\Omega$. La matrice A est *symétrique*, elle est de la forme :

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & K & & L_1 & & L_2 & \end{array} \\ \begin{pmatrix} \cdots & \nu\sum_{\substack{e_{K,L}\in\mathcal{E}_K \\ e_{K,L}\not\subset\partial\Omega}} \frac{|e_{K,L}|}{d_{K,L}} & \cdots & -\nu\frac{|e_{K,L_1}|}{d_{K,L_1}} & \cdots & -\nu\frac{|e_{K,L_2}|}{d_{K,L_2}} & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & -\nu\frac{|e_{L_1,K}|}{d_{L_1,K}} & \cdots & \nu\sum_{\substack{e_{L_1,L}\in\mathcal{E}_{L_1} \\ e_{L_1,L}\not\subset\partial\Omega}} \frac{|e_{L_1,L}|}{d_{L_1,L}} & \cdots & -\nu\frac{|e_{L_1,L_2}|}{d_{L_1,L_2}} & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & -\nu\frac{|e_{L_2,K}|}{d_{L_2,K}} & \cdots & -\nu\frac{|e_{L_2,L_1}|}{d_{L_2,L_1}} & \cdots & \nu\sum_{\substack{e_{L_2,L}\in\mathcal{E}_{L_2} \\ e_{L_2,L}\not\subset\partial\Omega}} \frac{|e_{L_2,L}|}{d_{L_2,L}} & \cdots \end{pmatrix} \begin{array}{c} K \\ \\ L_1 \\ \\ L_2 \end{array} \end{array}$$

On a noté $\mathcal{E}_K$ l'ensemble des arêtes de la cellule K et $e_{K,L} = (K|L) \in \mathcal{E}_{\text{int}}$ est l'arête commune aux cellules K et L. Les cellules K, L_1 et L_2 sont des cellules ayant des arêtes en commun (voir figure ci-dessous).

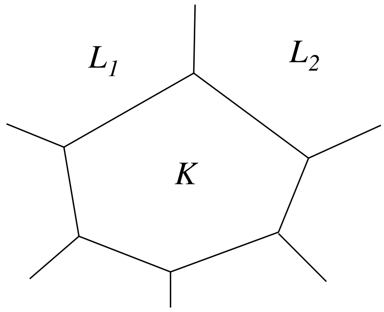


FIGURE 3 – Cellules K,L_1,L_2 ayant des arêtes en commun.

3 Assemblage de la matrice A

Pour construire la matrice A, on parcourt les arêtes du maillage de Voronoï. Pour une arête (intérieure) courante $e = (K|L) \in \mathcal{E}_{\text{int}}$, on ajoute les contributions des deux cellules adjacentes K et L :

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} \quad & K & \quad & L & \quad \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \cdots & +\nu\dfrac{|e|}{d_e} & \cdots & -\nu\dfrac{|e|}{d_e} & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & -\nu\dfrac{|e|}{d_e} & \cdots & +\nu\dfrac{|e|}{d_e} & \cdots \end{pmatrix} & \begin{array}{c} K \\ \\ \\ L \end{array} \end{array}$$

avec $d_e = |\mathbf{x}_K - \mathbf{x}_L|$. Lorsqu'on parcourt l'arête intérieure $e = (K|L)$, on calcule les coefficients $A(K,L)$, $A(L,K)$ de la matrice A et on met à jour les coefficients $A(K,K)$, $A(L,L)$:

$$\begin{array}{lcl} A(K,K) & \leftarrow & A(K,K) + |e|/d_e \\ A(L,L) & \leftarrow & A(L,L) + |e|/d_e \\ A(K,L) & \leftarrow & -|e|/d_e \\ A(L,K) & \leftarrow & -|e|/d_e \end{array}$$

4 Maillage

Récupérer l'archive suivante :

`http://www.iecl.univ-lorraine.fr/~Jean-Francois.Scheid/IMOI/TP1/TP1.zip`

Décompresser l'archive à l'endroit où vous lancez MATLAB. L'archive contient les mailleurs Triangle/Voronoï dans le répertoire `meshTRIVOR` :

— un mailleur 2D (`mesh2d` contenu dans le sous-répertoire `Mesh2d_v23`) réalisant une triangulation de Delaunay d'un domaine polygonal.

— un mailleur de Voronoï associé à la triangulation précédente.

Les deux maillages sont construits avec la fonction MATLAB dans le répertoire `meshTRIVOR` :

`mesh2d_trivor.m`

Le script

`exemple_trivor.m`

fournit un exemple d'utilisation de la fonction `mesh2d_trivor`.

Description des mailleurs Triangle/Voronoï

On construit deux maillages (primal/dual) d'un domaine *polygonal*. Le premier maillage est constitué de triangles (Delaunay) tandis que le second est un maillage de Voronoï associé à la triangulation de Delaunay du premier maillage. La fonction suivante construit ces deux maillages

```
[v,e,t,tarea,Cb,V,E,C] = mesh2d_trivor(node,edge,hdata)
```

Paramètres d'entrée

Le domaine étant polygonal, la géométrie est décrite par les bords du domaine à l'aide des tableaux suivants :

i) `node` : coordonnées des n noeuds du bord du domaine ; tableau de taille $n \times 2$:

`node=[x1, y1; x2, y2; ...; xn, yn]`

ii) `edge` : tableau des n arêtes du bord, de taille $n \times 2$:

`edge=[s1, s2; s2, s3; ...; sn, s1]`.

La première arête est composée des noeuds `s1` et `s2`, la deuxième des noeuds `s2` et `s3`, etc $\cdots$

iii) `hdata` : paramètres du maillage ; `hdata.hmax` définit la taille du maillage, etc $\cdots$

Paramètres de sortie

Ils contiennent les deux maillages Delaunay/Voronoï.

1. **Triangulation de Delaunay**

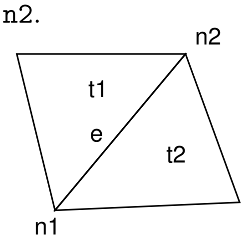
i) `e` : tableau des arêtes (`nbe` $\times 5$)

- colonnes 1 et 2 : numéros des noeuds correspondants aux 2 extrémités de l'arête.
- colonne 3 : labels : 0 = arête interne
  1 = arête sur le bord du domaine
- colonnes 4 et 5 : numéros des 2 triangles ayant l'arête en commun
  (colonne 5 = 0 si l'arête est sur le bord)

Ainsi, une arête `e` est définie par :

`e=[n1, n2, label, t1, t2]`

avec la convention d'orientation suivante (pour une arête interne) : le triangle `t1` (resp. `t2`) est à gauche (resp. à droite) de l'arête `e` quand celle-ci est parcourue en allant du sommet `n1` vers le sommet `n2`.



ii) `v` : tableau des coordonnées des noeuds (`nbnd` $\times 3$)

- colonnes 1 et 2 : coordonnées (x, y) des noeuds du maillage.
- colonne 3 : labels : 0 = noeud interne
  1 = noeud sur le bord du domaine

iii) `t` : tableau des triangles (connectivité) (`nbt` $\times 4$)

- colonnes 1, 2 et 3 : numéros des noeuds correspondants aux 3 sommets du triangle.
- colonne 4 : label = numéro du domaine (= 1)

iv) `tarea` : vecteurs des aires des triangles (`nbt` $\times$ 1)

v) `Cb` : tableau des coordonnées (x, y) des barycentres des triangles (`nbt` $\times$ 2)

2. **Maillage de Voronoï**

ii) `E` : tableau des arêtes du maillage de Voronoï (`nbE` $\times$ 5)
Tableau analogue au tableau d'arêtes `e` de la triangulation.
- colonnes 1 et 2 : numéros des noeuds des cellules qui sont les 2 extrémités de l'arête.
- colonne 3 : labels : 0 = arête interne
  1 = arête sur le bord du domaine
- colonnes 4 et 5 : numéros des 2 cellules ayant l'arête en commun
  (colonne 4 ou 5 = 0 si l'arête est sur le bord)

iii) `V` : tableau des coordonnées des noeuds des cellules du maillage de Voronoï (`nbV` $\times$ 3)
Tableau analogue au tableau des coordonnées `v` des noeuds de la triangulation.

iv) `C` : listes des noeuds des cellules du maillage de Voronoï (`nbNV`). En Matlab, `C` est une `structure`. Ainsi, `C{k}` donne la liste des noeuds de la cellule `k`. Les numéros des cellules sont les numéros des noeuds de la triangulation.

5 Gestion des conditions limites

Une construction de la matrice A ainsi que la gestion des conditions limites peut être réalisée simultanément en commençant par construire A pour *toutes les cellules du maillage de Voronoï* c'est-à-dire y compris pour celles qui ont une arête sur le bord $\partial\Omega$. A partir de cette matrice, on modifie le second membre et ensuite on élimine les lignes et colonnes correspondants à des cellules qui touchent le bord. Le script suivant réalise ce traitement :

```
%-------------------
% Traitement des CL
%-------------------
icbd=find(v(:,3)==1); % indices des centres des cellules sur le bord
icint=1:nbcell;       % indices des centres des cellules interieures
icint(icbd)=[];

% Coordonnées des centres des cellules sur le bord
xbd=x(icbd); ybd=y(icbd);
% Condition limite u=g sur le bord
ubd = g(xbd,ybd);

% Mise à jour du second membre b : on met dans le second membre b
% les termes correspondants aux cellules du bord
b=b-A(:,icbd)*ubd;

% Sélection des lignes et des colonnes associées à des cellules interieures
A = A(icint,icint);
b = b(icint);
```

Travail demandé.

Il vous est demandé de compléter le script `laplacien_vf.m` qui vous est fourni afin d'implémenter le schéma Volumes Finis décrit précédemment.

1. Construire la matrice `A` et le second membre `b` du système linéaire. Pour le calcul du second membre `b`, utiliser la fonction `fscmb.m` qui vous est fournie. Le calcul de l'aire d'une cellule peut être effectué en utilisant la fonction `polyarea` de MATLAB.
2. La solution du système linéaire est obtenu par `sol = A\b`. Le vecteur `sol` contient les valeurs de la solution `u` uniquement pour les cellules intérieures. Construire le vecteur `u` qui contient les valeurs de la solution pour toutes les cellules y compris celles qui touchent le bord du domaine.
3. Tester votre code avec les solutions exactes suivantes.
   (a) Soit $\Omega = (0,1)\times(0,1)$ et $f(x,y) = 2y(1-y)+2x(1-x)$. La solution exacte est donnée par $u_1(x,y) = x(1-x)y(1-y)$.
   (b) Soit $\Omega = (0,L)\times(0,H)$ et $f(x,y) = ((2\pi/L)^2 + (2\pi/H)^2)\sin(2\pi/Lx)\sin(2\pi/Hy)$. La solution exacte est donnée par $u_2(x,y) = \sin(2\pi/Lx)\sin(2\pi/Hy)$.
4. Déterminer l'ordre de convergence de cette méthode.