

## TP2

### Equation de la chaleur

## 1 Introduction

Le but de ce TP est de résoudre l'équation de la chaleur en 2D par une méthode de Volumes Finis avec différentes discrétisations en temps. On considère un domaine polygonal  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Pour  $T > 0$ , on cherche une fonction  $u = u(\mathbf{x}, t)$  pour  $\mathbf{x} \in \Omega$  et  $t \in [0, T]$  vérifiant l'équation de la chaleur suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u = f \quad \text{dans } \Omega \times ]0, T[ \quad (1)$$

$$u = g \quad \text{sur } \partial\Omega \times ]0, T[ \quad (2)$$

$$u(\cdot, 0) = u_0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (3)$$

Les fonctions  $f, g, u_0$  et le paramètre  $\nu > 0$  sont donnés. On associe au domaine  $\Omega$  un maillage "Volumes Finis" dont les volumes de contrôle sont les cellules de Voronoï associées à une triangulation de Delaunay de  $\Omega$ . A chaque cellule  $K$ , on associe les centres  $x_K$  qui sont les sommets des triangles (cf. TP1).

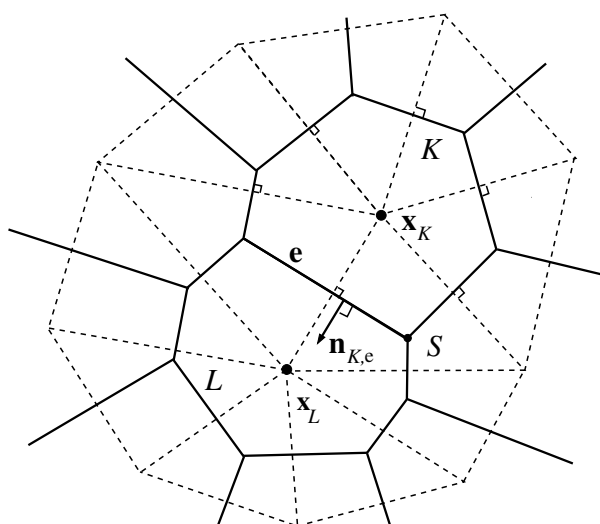


FIGURE 1 – Volumes de contrôle (Voronoi) et triangulation de Delaunay

## 2 Formulation en Volumes Finis

### 2.1 Discrétisation en espace

On intègre l'équation (1) sur une cellule  $K$  et en utilisant la formule de la divergence, on obtient :

$$\frac{d}{dt} \int_K u(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} - \nu \int_{\partial K} \nabla u \cdot \mathbf{n}_K d\Gamma = |K| f_K$$

avec  $f_K(t) = \frac{1}{|K|} \int_K f(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}$  et  $\mathbf{n}_K$  désigne la normale unitaire dirigée vers l'extérieur de  $K$ . On pose

$u_K(t) = \frac{1}{|K|} \int_K u(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}$  et on a, pour  $t \in [0, T]$ ,

$$|K| \frac{du_K}{dt}(t) - \nu \sum_{e \in \mathcal{E}_K} \int_e \nabla u \cdot \mathbf{n}_{K,e} d\Gamma = |K| f_K(t), \quad (4)$$

où  $\mathcal{E}_K$  désigne l'ensemble des arêtes de la cellule  $K$  et  $\mathbf{n}_{K,e}$  est la normale unitaire à  $e$  dirigée vers l'extérieur de  $K$ .

On approche le flux  $-\int_e \nabla u \cdot \mathbf{n}_{K,e} d\Gamma \simeq F_{K,e}$  avec

$$F_{K,e} = \frac{(u_K - u_L)}{|\mathbf{x}_K - \mathbf{x}_L|} |e| \quad \text{si } e \notin \partial\Omega. \quad (5)$$

Si  $K$  possède une arête sur le bord  $\partial\Omega$ , on impose

$$u_K = u_e = \frac{1}{|K|} \int_e g(\mathbf{x}, t) d\Gamma \quad \text{si } e \subset \partial\Omega. \quad (6)$$

Le schéma Volumes Finis de discrétisation en espace s'écrit ainsi, pour  $t \in [0, T]$ ,

$$|K| \frac{du_K}{dt}(t) + \sum_{\substack{e \in \mathcal{E}_K \\ e \not\subset \partial\Omega}} \nu F_{K,e}(t) = |K| f_K(t). \quad (7)$$

## 2.2 Discrétisations en temps

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\Delta t = \frac{T}{n} > 0$  le pas de discrétisation en temps avec  $t^k = k\Delta t$  pour  $k = 0, 1, \dots, n$ . On note l'approximation  $u_K^k \simeq u_K(t^k) = \frac{1}{|K|} \int_K u(\mathbf{x}, t^k) d\mathbf{x}$ .

### 2.2.1 Schéma explicite

Le schéma explicite s'écrit, pour tout  $K \in \mathcal{T}$ ,  $k = 0, \dots, n$ ,

$$|K| \frac{(u_K^{k+1} - u_K^k)}{\Delta t} + \sum_{\substack{e \in \mathcal{E}_K \\ e \not\subset \partial\Omega}} \nu F_{K,e}^k = |K| f_K^k, \quad (8)$$

avec

$$F_{K,e}^k = \frac{(u_K^k - u_L^k)}{|\mathbf{x}_K - \mathbf{x}_L|} |e| \quad (e \not\subset \partial\Omega). \quad (9)$$

On écrit les relations (8) pour toute cellule  $K$  *intérieure* i.e. une cellule ne possédant pas d'arête sur le bord  $\partial\Omega$ . Pour une cellule  $K$  ayant une arête sur  $\partial\Omega$ , on impose  $u_K = u_e$  donnée par (6). On obtient ainsi le schéma :

— Pour toute cellule  $K$  *intérieure*,

$$u_K^{k+1} = u_K^k - \frac{\nu\Delta t}{|K|} \sum_{\substack{e \in \mathcal{E}_K \\ e=(K|L)}} \frac{|e|}{|\mathbf{x}_K - \mathbf{x}_L|} (u_K^k - u_L^k) + \Delta t f_K^k \quad (10)$$

— Pour toute cellule  $K$  possédant une arête  $e \subset \partial\Omega$ , on impose  $u_K^{k+1} = u_e$  où  $u_e$  est donnée par (6).

## Systeme linéaire

On prend (pour simplifier)  $g = 0$ . Soit  $N$  le nombre de cellules de contrôles *intérieures*. On regroupe les inconnues dans le vecteur  $\mathbf{u}^k = (u_{K_1}^k, \dots, u_{K_N}^k)^\top$  et on note  $\mathbf{f}^k = (f_{K_1}^k, \dots, f_{K_N}^k)^\top$ .

Le système linéaire correspondant à (10) s'écrit

$$\mathbf{u}^{k+1} = (I_N - \nu\Delta t H^{-1} A) \mathbf{u}^k + \Delta t \mathbf{f}^k, \quad (11)$$

où  $I_N$  est la matrice identité d'ordre  $N$  et  $A$  est la matrice de taille  $N \times N$  correspondant au Laplacien (cf. TP1 "Volumes Finis pour le Laplacien"). La matrice *diagonale*  $H$  de taille  $N \times N$  est définie par

$$H = \begin{pmatrix} |K_1| & & & 0 \\ & |K_2| & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & |K_N| \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Le système (11) est *explicite* au sens où il n'y a pas de système linéaire à résoudre pour déterminer  $\mathbf{u}^{k+1}$  à partir de  $\mathbf{u}^k$ . En revanche, le schéma (11) doit vérifier la condition de stabilité

$$\lambda = \nu \Delta t \max_{1 \leq i \leq N} \left( \frac{1}{|K_i|} \sum_{\substack{e \in \mathcal{E}_{K_i} \\ e=(K_i|L)}} \frac{|e|}{|\mathbf{x}_{K_i} - \mathbf{x}_L|} \right) \leq 1. \quad (13)$$

### 2.2.2 Schéma implicite

Le schéma implicite s'écrit, pour tout  $K \in \mathcal{T}$ ,  $k = 0, \dots, n$ ,

$$|K| \frac{(u_K^{k+1} - u_K^k)}{\Delta t} + \sum_{\substack{e \in \mathcal{E}_K \\ e \not\subset \partial\Omega}} \nu F_{K,e}^{k+1} = |K| f_K^{k+1}, \quad (14)$$

avec

$$F_{K,e}^{k+1} = \frac{(u_K^{k+1} - u_L^{k+1})}{|\mathbf{x}_K - \mathbf{x}_L|} |e| \quad (e \not\subset \partial\Omega). \quad (15)$$

On écrit les relations (14) pour toute cellule  $K$  *intérieure* i.e. une cellule ne possédant pas d'arête sur le bord  $\partial\Omega$ . Pour une cellule  $K$  ayant une arête sur  $\partial\Omega$ , on impose  $u_K = u_e$  donnée par (6). On obtient ainsi le schéma :

— Pour toute cellule  $K$  *intérieure*,

$$u_K^{k+1} + \frac{\nu \Delta t}{|K|} \sum_{\substack{e \in \mathcal{E}_K \\ e=(K|L)}} \frac{|e|}{|\mathbf{x}_K - \mathbf{x}_L|} (u_K^{k+1} - u_L^{k+1}) = u_K^k + \Delta t f_K^{k+1} \quad (16)$$

— Pour toute cellule  $K$  possédant une arête sur le bord  $\partial\Omega$ , on impose  $u_K^{k+1} = u_e$  où  $u_e$  est donnée par (6).

### Système linéaire

On prend  $g = 0$  (pour simplifier). Le système linéaire correspondant à (16) s'écrit

$$(I_N + \nu \Delta t H^{-1} A) \mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{u}^k + \Delta t \mathbf{f}^{k+1}$$

où  $A$  est la matrice de taille  $N \times N$  correspondant au Laplacien (cf. TP1) et  $H$  est définie par (12). On écrit le système précédent plutôt sous la forme

$$(H + \nu \Delta t A) \mathbf{u}^{k+1} = H (\mathbf{u}^k + \Delta t \mathbf{f}^{k+1}), \quad (17)$$

la matrice  $\mathcal{M} = H + \nu \Delta t A$  étant *symétrique* (ceci peut être avantageux pour la résolution numérique du système linéaire (17)). On montre également que  $\mathcal{M}$  est une  $M$ -matrice.

## Travail demandé.

1. Implémenter les schémas Volumes Finis explicite (10) et implicite (16) en MATLAB. Construire les systèmes (11) et (17) à partir du TP1 pour la construction de la matrice  $A$  du Laplacien.
2. Pour le schéma implicite (17), à chaque itération sur  $k$ , on doit résoudre un système linéaire avec la matrice  $\mathcal{M} = H + \nu \Delta t A$ . Cette matrice est indépendante de  $k$  et on peut donc la factoriser au début des itérations par une décomposition  $PMQ = LU$  où  $P$  et  $Q$  sont des matrices de permutation (resp. lignes et colonnes). La résolution du système linéaire  $\mathcal{M}x = b$  à partir de cette décomposition s'écrit en MATLAB :

```
[L,U,P,Q]=lu(M,'vector'); % factorisation avant les itérations sur n
...
sol = U \ (L \ b(P));
x=sol(Q);
```

C'est beaucoup plus rapide d'utiliser cette décomposition (complexité en  $\mathcal{O}(N^2)$ ) plutôt que de résoudre à chaque itération le système avec  $\mathbf{x}=\mathbf{M}\backslash\mathbf{b}$  (complexité en  $\mathcal{O}(N^3)$ ).

3. Pour le schéma explicite (11), une fois le maillage construit, calculer la quantité

$$\max_{1 \leq i \leq N} \left( \frac{1}{|K_i|} \sum_{\substack{e \in \mathcal{E}_{K_i} \\ e=(K_i|L)}} \frac{|e|}{|\mathbf{x}_{K_i} - \mathbf{x}_L|} \right).$$

Choisir ensuite le pas de temps  $\Delta t$  pour que la condition de stabilité (13) du schéma explicite soit satisfaite.

4. Tester votre code avec l'exemple suivant : On choisit  $\Omega = ]0, a[ \times ]0, b[$ ,  $a = 2.5$ ,  $b = 1$ ,  $T = 1$  et

$$u(\mathbf{x}, t) = \exp\left(-\nu\pi^2 \left(\frac{k_1^2}{a^2} + \frac{k_2^2}{b^2}\right) t\right) \sin\left(\frac{k_1\pi}{a} x_1\right) \sin\left(\frac{k_2\pi}{b} x_2\right),$$

pour  $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in [0, a] \times [0, b]$ ,  $t \in [0, T]$ . On prend  $k_1 = 2$ ,  $k_2 = 1$ . La fonction  $u$  est la solution de l'équation de la chaleur (1)–(3) avec  $\mathbf{f} \equiv 0$  et la donnée initiale

$$u_0(\mathbf{x}) = \sin\left(\frac{k_1\pi}{a} x_1\right) \sin\left(\frac{k_2\pi}{b} x_2\right).$$

5. Pour le schéma explicite (11), tester la condition de stabilité (13) avec  $\lambda > 1$ .