

TP3

Volumes Finis pour l'équation de transport

Le but de ce TP est de résoudre l'équation de transport 2D par Volumes Finis. On considère un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ représentant un récipient rempli par un fluide en mouvement. On suppose connu le champ de vitesse $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ en chaque point $\mathbf{x} \in \Omega$ du fluide. La vitesse \mathbf{V} est à divergence nulle i.e. $\text{div}(\mathbf{V}) = 0$ dans Ω . A l'instant initial ($t = 0$), on ajoute un composé (du sel par exemple) dans le fluide avec une concentration (densité) donnée $u_0(\mathbf{x})$ et on s'intéresse à l'évolution de la concentration $u = u(\mathbf{x}, t)$ du composé dans le fluide. Cette évolution est régie par la conservation de la masse :

$$(P) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \text{div}(u\mathbf{V}) = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u(\cdot, 0) = u_0 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Le vecteur \mathbf{n} désigne la normale unitaire à $\partial\Omega$, dirigée vers l'extérieur de Ω .

1 Schéma Volumes Finis explicite

Dans un contexte de Volumes Finis, on considère un partitionnement de Ω en cellules de contrôle K_i auxquelles sont associées des centres $\mathbf{c}_i = \mathbf{x}_{K_i}$. On cherche les approximations $u_i^n \simeq \frac{1}{|K_i|} \int_{K_i} u(\mathbf{x}, t^n) d\mathbf{x}$ où $t^n = n\Delta t$. Le schéma s'écrit (cf. Cours)

$$(u_i^{n+1} - u_i^n) + \frac{\Delta t}{|K_i|} \sum_{\substack{e_{ij} \subset \partial K_i \\ e_{ij} = (K_i | K_j)}} |e_{ij}| \Phi(u_i^n, u_j^n, \mathbf{n}_{ij}) = 0 \quad (1)$$

où e_{ij} désigne l'arête commune aux cellules K_i et K_j ; \mathbf{n}_{ij} est la normale unitaire à e_{ij} dirigée vers l'extérieur de K_i (cf. Figure 1). Le flux numérique Φ est choisi par décentrement (upwind) :

$$\Phi(u_i, u_j, \mathbf{n}_{ij}) = u_i (\bar{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{n}_{ij})^+ + u_j (\bar{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{n}_{ij})^- \quad (2)$$

avec

$$(\bar{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{n}_{ij})^+ = \max(\bar{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{n}_{ij}, 0), \quad (\bar{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{n}_{ij})^- = \min(\bar{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{n}_{ij}, 0), \quad \bar{\mathbf{V}} = \frac{1}{|e_{ij}|} \int_{e_{ij}} \mathbf{V} d\Gamma.$$

Sur chaque arête e , on calcule la vitesse moyenne $\bar{\mathbf{V}}$ par :

$$\bar{\mathbf{V}} = \frac{\mathbf{V}(\mathbf{x}_1) + \mathbf{V}(\mathbf{x}_2)}{2} \text{ où } \mathbf{x}_1 \text{ et } \mathbf{x}_2 \text{ sont les deux extrémités de l'arête } e. \quad (3)$$

2 Cellules et maillage

Les cellules de contrôle sont les triangles $K_i = T_i$ d'une triangulation de Delaunay de type "Eléments Finis". Les centres $\mathbf{c}_i = \mathbf{x}_{K_i}$ des cellules sont les barycentres des triangles. On remarquera qu'en particulier,

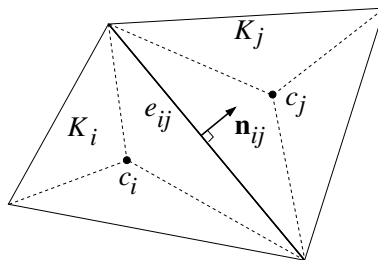


FIGURE 1 – Cellules de contrôle pour les volumes finis

il n'est pas nécessaire que les angles des triangles soient tous plus petits que $\pi/2$.

Récupérer l'archive suivante :

<http://iecl.univ-lorraine.fr/~Jean-Francois.Scheid/IMO1/TP3/TP3.zip>

Cette archive contient des scripts MATLAB à compléter ainsi que les maillages “Volumes Finis” Delaunay/Voronoi contenus dans le répertoire `meshTRIVOR`¹. Les maillages Delaunay/Voronoi du domaine sont réalisés avec la fonction `mesh2d_trivor.m` (voir le TP1 ou bien le fichier `./meshTRIVOR/doc/mesh2d_trivor.pdf` dans l'archive pour les descriptions complètes des structures de données associées aux maillages Delaunay/Voronoi).

3 Système linéaire

Soit N le nombre de cellules de contrôles (= nombre de triangles de la triangulation). Le schéma (1) avec (2) s'écrit, pour $i = 1, \dots, N$,

$$u_i^{n+1} = \left(1 - \frac{\Delta t}{|K_i|} \sum_{\substack{e_{ij} \subset \partial K_i \\ e_{ij}=(K_i|K_j)}} |e_{ij}| (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_{ij})^+ \right) u_i^n - \frac{\Delta t}{|K_i|} \sum_{\substack{e_{ij} \subset \partial K_i \\ e_{ij}=(K_i|K_j)}} |e_{ij}| (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_{ij})^- u_j^n \quad (4)$$

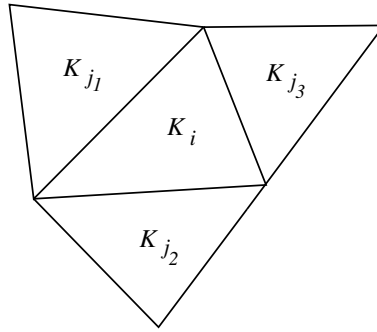
On pose $\mathbf{u}^n = (u_1^n, \dots, u_N^n)^\top$ et le système linéaire correspondant au schéma explicite, s'écrit :

$$\mathbf{u}^{n+1} = (I_d - \Delta t A) \mathbf{u}^n \quad (5)$$

où A est la matrice de taille $N \times N$, de la forme

$$A = \begin{pmatrix} & j_1 & & j_2 & & i & & j_3 \\ \cdots & \frac{\alpha_{ij_1}^-}{|K_i|} & \cdots & \frac{\alpha_{ij_2}^-}{|K_i|} & \cdots & \frac{1}{|K_i|} \sum_{e_{ij} \subset \partial K_i} \alpha_{ij}^+ & \cdots & \frac{\alpha_{ij_3}^-}{|K_i|} & \cdots \end{pmatrix} \leftarrow \text{ligne } i$$

avec $\alpha_{ij}^\pm = |e_{ij}| (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_{ij})^\pm$. Les trois cellules $K_{j_1}, K_{j_2}, K_{j_3}$ sont les trois triangles adjacents au triangle K_i (cf. Figure ci-dessous).



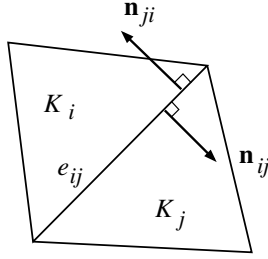
4 Assemblage

Pour construire la matrice A , on boucle sur les arêtes *intérieures* des triangles. Pour une arête courante $e \not\subset \partial\Omega$, on ajoute les contributions des deux triangles ayant e comme arête commune. On considère ainsi la matrice élémentaire A_{elem} suivante :

$$A_{\text{elem}} = \begin{pmatrix} & i & & j \\ + \frac{|e_{ij}|}{|K_i|} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_{ij})^+ & & + \frac{|e_{ij}|}{|K_i|} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_{ij})^- & \\ + \frac{|e_{ij}|}{|K_j|} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_{ji})^- & & + \frac{|e_{ij}|}{|K_j|} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_{ji})^+ & \end{pmatrix} \begin{matrix} i \\ j \end{matrix}$$

Remarque : Puisque $\mathbf{n}_{ji} = -\mathbf{n}_{ij}$, on a les relations $(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_{ji})^- = -(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_{ij})^+$ et $(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_{ji})^+ = -(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_{ij})^-$.

1. Les maillages “Volumes Finis” Delaunay/Voronoi peuvent aussi être récupérés directement à l'adresse <http://iecl.univ-lorraine.fr/~Jean-Francois.Scheid/Matlab/meshTRIVOR.zip>



L'assemblage de la matrice A se fait alors de la façon suivante :

$$\begin{aligned} A(i, i) &= A(i, i) + \frac{|e_{ij}|}{|K_i|} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_{ij})^+, & A(i, j) &= \frac{|e_{ij}|}{|K_i|} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_{ij})^-, \\ A(j, i) &= -\frac{|e_{ij}|}{|K_j|} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_{ij})^+, & A(j, j) &= A(j, j) - \frac{|e_{ij}|}{|K_j|} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_{ij})^- \end{aligned}$$

5 Condition de stabilité CFL

Pour le schéma "Volumes Finis" (1) explicite en temps, la condition de stabilité CFL s'écrit :

$$\Delta t \max_{1 \leq i \leq N} \left(\frac{1}{|K_i|} \sum_{\substack{e_{ij} \subset \partial K_i \\ e_{ij} = (K_i | K_j)}} |e_{ij}| (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_{ij})^+ \right) \leq 1 \quad (6)$$

Travail demandé.

1. Implémenter le schéma explicite (5) en MATLAB, en complétant le script

`vf_transport.m`

qui est fourni dans l'archive TP3.zip.

2. **Tests numériques.** On choisit $\Omega = [0, 1]^2$. Tester votre code avec les données suivantes

(a) Champ de vitesse constant $\mathbf{V}(x, y) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Donnée initiale $u_0(x, y) = \mathbf{1}_D(x, y)$ où $D = [\frac{1}{8}, \frac{3}{8}] \times [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$

Que constatez-vous ?

(b) Champ de vitesse $\mathbf{V}(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(\pi(x - \frac{1}{2})) \sin(\pi(y - \frac{1}{2})) \\ -\sin(\pi(x - \frac{1}{2})) \cos(\pi(y - \frac{1}{2})) \end{pmatrix}$

Donnée initiale $u_0(x, y) = \mathbf{1}_D(x, y)$ où $D = [\frac{1}{8}, \frac{3}{8}] \times [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$

(c) Champ de vitesse $\mathbf{V}(x, y) = \begin{pmatrix} -200y(y-1)(2y-1)x^2(x-1)^2 \\ 200x(x-1)(2x-1)y^2(y-1)^2 \end{pmatrix}$

Donnée initiale $u_0(x, y) = \mathbf{1}_D(x, y)$ où D est le cercle de centre $(0.3, 0.4)$ et de rayon $r_0 = 0.15$

Vérifier qu'à chaque itération en temps, la masse totale du composé reste constante : le schéma est globalement conservatif. Tester la stabilité du schéma.

3. Ecrire le schéma Volumes Finis **implicite** obtenu en prenant le flux numérique

$$\Phi(u_i^{n+1}, u_j^{n+1}, \mathbf{n}_{ij})$$

dans les relations (1). Ecrire ce schéma sous forme matricielle $M\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n$. Implémenter ce schéma en MATLAB. Reprendre les tests numériques précédents et tester la stabilité du schéma implicite.