Feuille 2
Dualité

Exercice 1. *Dual d'un primal sous forme standard*

A partir de la connaissance du dual d'un programme linéaire sous forme canonique pure (i.e. avec des contraintes de la forme $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$), déterminer le dual d'un programme linéaire sous forme standard (i.e. avec des contraintes de la forme $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$). Plus précisément déterminer le dual du problème (P) suivant

$$\max_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^\top \cdot \mathbf{x}$$
$$\begin{cases} A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

Exercice 2. *Application du Théorème des écarts complémentaires*

On considère le programme linéaire (P) suivant

$$\max F(\mathbf{x}) = 4x_1 + 5x_2$$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 + 4x_2 \leq 1 \\ x_1,\, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

A partir du théorème des écarts complémentaires, montrer que $\mathbf{x} = (\frac{3}{11}, \frac{2}{11})$ est solution optimale de (P).

Exercice 3. On considère le programme linéaire (P) suivant

$$\min_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$
$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \alpha_i, \quad i = 1, \cdots, m \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \beta_j, \quad j = 1, \cdots, n \\ x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \cdots, m; \quad j = 1, \cdots, n \end{cases}$$

On suppose que $c_{ij} > 0$, $\alpha_i > 0$, $\beta_j > 0$ pour tout $i = 1, \cdots, m$ et $j = 1, \cdots, n$. Enfin, on fait l'hypothèse supplémentaire que

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \tag{1}$$

1. Justifier l'hypothèse (1).
2. On note $\mathbf{x} = (x_{11}, \ldots, x_{1n},\ x_{21}, \ldots, x_{2n},\ \ldots\ ,\ x_{m1}, \ldots, x_{mn})^\top$. Ecrire les contraintes sous la forme matricielle $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ où A est une matrice de taille $(m+n) \times nm$ à préciser.
3. (a) Soit $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m+n}$ avec $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\mathbf{y}^\top A \geq \mathbf{0}$. Montrer que

$$u_i + v_j \geq 0,\ \forall i \in \{1, \ldots, m\}, \forall j \in \{1, \ldots, n\}.$$

(b) Montrer que

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i\right)\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j\right) \geq 0$$

(c) Déduire du Lemme de Farkas que l'ensemble des solutions réalisables de (P) est non-vide. Montrer que cet ensemble est borné.

4. Déterminer le problème dual (D) de (P).
5. A partir du théorème des écarts complémentaires, donner une condition d'optimalité pour la solution de (P).
6. On considère le programme linéaire avec les données suivantes ($m = 3$, $n = 5$) :

c_{ij}	1	2	3	4	5	α_i
1	25	10	15	5	4	30
2	2	5	1	18	20	30
3	1	10	25	6	4	40
β_j	20	20	10	30	20	100

A partir du théorème des écarts complémentaires, montrer que

$$\mathbf{x} = (x_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 30 & 0 \\ 0 & 20 & 10 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$

est solution optimale de (P).