M2 IMSD – Université de Lorraine 2022-23
Recherche Opérationnelle

Feuille 3
Programmation linéaire en nombres entiers

Exercice 1.

On reprend le programme linéaire de l'exercice 3 de la feuille 2 :

$$\min_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$(P) \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \alpha_i, \quad i = 1, \cdots, m \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \beta_j, \quad j = 1, \cdots, n \\ x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \cdots, m; \quad j = 1, \cdots, n \end{cases}$$

avec $c_{ij} > 0$ et on suppose que les α_i, β_j sont entiers pour tout $i \in \{1, \cdots, m\}$ et $j \in \{1, \cdots, n\}$, avec la propriété que $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_j$.

1. Montrer que la solution optimale de (P) est entière.
2. En déduire que si $\alpha_i = 1$ pour tout $i \in \{1, \cdots, m\}$ ou bien si $\beta_j = 1$ pour tout $j \in \{1, \cdots, n\}$, la solution optimale de (P) est composée de variables binaires

Exercice 2. *Programmation linéaire en variables* $\{0, 1\}$ *– Problème de sac à dos.*

Soit le problème de "sac-à-dos" suivant :

$$\max\left[F(\mathbf{x}) = 6x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 4x_4\right]$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 4x_4 \leq 8 \\ 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 7 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{cases}$$

Résoudre ce problème par une procédure de Branch-and-Bound.

Exercice 3. *Programmation linéaire en nombres entiers – Problème de sac à dos généralisé.*

Soit le problème de programmation linéaire en nombres entiers suivant :

$$\max\left[F(x) = 5x_1 + 6x_2 + 4x_3\right]$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 10 \\ x_1, x_2 \in \{0, 1\}; x_3 \in \{0, 1, 2\} \end{cases}$$

Résoudre ce problème par une procédure de Branch-and-Bound. Pour déterminer une solution particulière donnant une valeur $\overline{F}$, examiner les variables par ordre décroissant des coefficients dans F multipliés par les valeurs maximales des variables.

Dans la procédure de Branch-and-Bound :

— examiner dans l'ordre les variables x_1, x_2 puis x_3.
— séparer toujours en premier le sous-ensemble S_k qui possède la majoration b_k de F la plus grande.
— mettre à jour la valeur $\overline{F}$ quand une solution réalisable est obtenue.

Exercice 4. *Programmation linéaire en variables $\{0,1\}$ – cas général.*

1. Résoudre le problème suivant par une procédure de Branch-and-Bound :

$$(P_1)\quad \begin{array}{l} \max\left[F(\mathbf{x}) = 10x_1 + 8x_2 - 5x_3\right] \\ \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 5 \\ x_1, x_2, x_3 \in \{0,\ 1\} \end{cases} \end{array}$$

Appliquer la procédure sur le problème obtenu en faisant disparaître les coefficients négatifs de la fonction objectif, à l'aide d'un ou plusieurs changements de variables. Vous obtenez ainsi un nouveau problème linéaire où tous les coefficients de la fonction objectif sont désormais positifs. On notera encore x_i les variables de ce problème. Pour mettre à jour, les majorants e_k (estimations) des variables d'écarts, il faut tenir compte du signe des coefficients a_i dans les contraintes :

$$\text{Si } x_i = 1, \text{ alors } e_{k+1} = \begin{cases} e_k - a_i & \text{si } a_i > 0, \\ e_k & \text{si } a_i \leq 0 \end{cases}.$$

$$\text{Si } x_i = 0, \text{ alors } e_{k+2} = \begin{cases} e_k & \text{si } a_i > 0, \\ e_k + a_i & \text{si } a_i \leq 0 \end{cases}.$$

2. Résoudre par Branch-and-Bound le problème

$$(P_2)\quad \begin{array}{l} \max\left[F(\mathbf{x}) = 6x_1 - 9x_2 + 8x_3 + 4x_4\right] \\ \begin{cases} 4x_1 - 6x_2 + 5x_3 - 4x_4 \leq 2 \\ 3x_1 - 6x_2 - 4x_3 + 3x_4 \leq 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{cases} \end{array}$$

Exercice 5. *Méthode des coupes entières*

On considère le programme linéaire en nombres entiers suivant

$$(P)\quad \begin{cases} \max\limits_{\mathbf{x}=(x_1,x_2)} \left[F(x) = x_1 + 10x_2\right] \\ A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \\ x_1,\ x_2 \ \textbf{entiers} \end{cases} \qquad \text{avec } A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 18 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 93 \\ 78 \end{pmatrix}.$$

Utiliser une procédure de séparation avec des coupes entières (Branch-and-Cut) pour résoudre (P).

Rappel de la méthode :

1. On commence par résoudre le problème (P_0) qui est le problème (P) relaxé i.e. sans la contrainte "x_1 et x_2 entiers".
2. On examine si la solution optimale (x_1^*, x_2^*) de (P_0) est entière.
   (a) Si c'est le cas alors on arrête.
   (b) Sinon, on considère la *première* variable optimale non entière x_i^* ($i = 1$ ou 2) et on construit deux autres problèmes (P_1) et (P_2) en rajoutant à (P_0) respectivement les contraintes
   $$x_i \leq \lfloor x_i^* \rfloor \text{ pour } (P_1), \quad x_i \geq \lfloor x_i^* \rfloor + 1 \text{ pour } (P_2) \tag{1}$$
   où $\lfloor\cdot\rfloor$ désigne la partie entière inférieure.
   (c) On résout les problèmes *auxiliaires* (P_1) et (P_2).
   (d) On sélectionne le problème (P_1) ou (P_2) réalisable qui possède le coût F le plus grand et on retourne en 2) avec ce problème à la place de (P_0).

On associe à cette méthode une procédure de type Branch-and-Bound. La phase de séparation (branch) correspond à la construction des deux problèmes (P_1) et (P_2). La phase d'évaluation (bound) correspond à la détermination d'une valeur $\overline{F}$ du coût pour une solution réalisable **entière** particulière. Initialement, on prend $\overline{F} = +\infty$ et on actualise $\overline{F}$ quand une solution optimale *entière* d'un problème auxiliaire est obtenue. La valeur $\overline{F}$ permet de déterminer si on arrête d'examiner un sommet de l'arbre.

Vous utiliserez les indications ci-dessous qui fournissent les solutions optimales des programmes linéaires (sans contrainte d'intégrité sur les variables) de la forme

$$(PL) \quad \left\{ \begin{array}{l} \max\limits_{\mathbf{x}} [F(\mathbf{x}) = x_1 + 10x_2] \\ \quad A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \\ \quad C\mathbf{x} \leq \mathbf{d}, \\ \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \right.$$

où des contraintes supplémentaires (les coupes entières) ont été rajoutées avec la matrice C et le vecteur $\mathbf{d}$. Les indications sont données pour certaines valeurs de C et $\mathbf{d}$.

Indications :

1. La solution optimale de (P) relaxé (i.e. sans contrainte d'intégrité sur les variables) est donnée par $x_1^* = 3/2,\ x_2^* = 5$ et $F^*_{\max} = 51,5$.
2. Avec $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{d} = 1$, la solution optimale de (PL) est $x_1^* = 1,\ x_2^* = 4$ et $F^*_{\max} = 41$.
3. Avec $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{d} = -2$, la solution optimale de (PL) est $x_1^* = 2,\ x_2^* = 89/18 \simeq 4,944$ et $F^*_{\max} = 463/9 \simeq 51,444$.
4. Avec $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, la solution optimale de (PL) est $x_1^* = 10,5,\ x_2^* = 4$ et $F^*_{\max} = 50,5$.
5. Avec $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$, la solution optimale de (PL) est $x_1^* = 10,\ x_2^* = 4$ et $F^*_{\max} = 50$.
6. Avec $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -11 \end{pmatrix}$, la solution optimale de (PL) est $x_1^* = 11,\ x_2^* \simeq 3,944$ et $F^*_{\max} = 50,444$.
7. Avec $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -11 \\ 3 \end{pmatrix}$, la solution optimale de (PL) est $x_1^* = 12,5\,,\ x_2^* = 3$ et $F^*_{\max} = 42,5$.

Exercice 6. *Branch-&-Cut avec MATLAB*

On considère le programme linéaire en nombres entiers suivant

$$(P) \quad \left\{ \begin{array}{l} \max_{(x_1,x_2)} (F(x_1,x_2) = 8x_1 + 11x_2) \\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ 5x_1 + 8x_2 \leq 50 \\ x_1, x_2 \geq 0 \text{ entiers} \end{array} \right.$$

1. Résoudre (P) par la méthode de Branch-&-Cut (cf. exercice précédent) avec des coupes entières, en utilisant MATLAB.

Pour résoudre les différents problèmes auxiliaires, utiliser la fonction `linprog` de MATLAB. Les coupes entières seront prises en compte comme des bornes (inférieures ou supérieures) sur les variables en définissant les vecteurs `lb` et `ub`[1] pour la fonction `linprog`.

2. Résoudre directement (P) en utilisant la fonction `intlinprog` de MATLAB. Comparer avec la solution précédente.

Exercice 7. *Coupes de Gomory*

Soit le programme linéaire en nombres entiers suivant :

$$(P) \quad \begin{array}{l} \max_{\mathbf{x}=(x_1,x_2)} [F(\mathbf{x}) = x_1 + 2x_2] \\ \begin{cases} 7x_1 + 3x_2 \leq 21 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \textbf{ entiers} \end{cases} \end{array}$$

On notera (P') le problème (P) relaxé i.e. sans la contrainte d'intégrité sur les variables.

1. Dessiner l'ensemble des solutions réalisables du problème (P'). Résoudre graphiquement les problèmes (P') et (P).
2. La solution optimale du problème (P') est $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*)^\top = (12/7, 3)^\top \simeq (1.714, 3)^\top$. La composante x_1^* n'est pas entière. On cherche à déterminer une contrainte supplémentaire à ajouter à (P') pour forcer cette composante à devenir entière.
   (a) Ecrire le problème (P') sous forme standard en désignant par e_1 et e_2 les variables d'écarts.
   (b) Ecrire la coupe de Gomory associée à la partie fractionnaire de x_1^*.
   (c) Montrer que cette coupe de Gomory s'écrit
   $$e_1 + 4e_2 \geq 5$$
   (d) En exprimant e_1 et e_2 en fonction de x_1 et x_2, établir que la contrainte précédente s'écrit
   $$x_1 + x_2 \leq 4 \tag{1}$$
   (e) Ajouter la contrainte (1) au problème (P') pour obtenir un problème (P''). Résoudre graphiquement (P''). Commenter la solution optimale obtenue pour (P'').

1. S'il n'y a pas de borne supérieure sur une variable, vous pouvez quand même donner la valeur `Inf` correspondante dans le vecteur `ub`