Feuille 4
Ordonnancement

Exercice 1. Un projet de rénovation d'une maison comprend 10 tâches de A à J. Les contraintes de précédence (tâches immédiatement antérieures à chaque tâche) sont indiquées dans le tableau ci-dessous avec les durées de réalisation de chacune des tâches.

tâche i	précédence	durée d_i
A études	-	5
B gros oeuvre	A	8
C électricité	B	3
D plomberie	B	4
E chauffage	C	2
F isolation	D, E	2
G plafonnage	F	4
H carrelage	F	6
I menuiserie	G	5
J finition	I, H	6

1. Représenter le graphe-événements de la méthode PERT.
2. Déterminer :
   — les dates de début au plus tôt (ES), et au plus tard (LS).
   — les dates de fin au plus tôt (EF), et au plus tard (LF).
   — les marges totales (MT) et libres (ML).

   Déterminer la durée minimale de réalisation du projet. Indiquer les tâches qui ne sont pas critiques.

Exercice 2. Un projet est constitué de 14 tâches qui présentent des contraintes de précédence (tâches immédiatement antérieures à chaque tâche) indiquées dans le tableau ci-dessous avec également les durées de chacune des tâches.

tâche i	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
précédence	-	-	A	A	C	B,D	F	E,F	E,G	E,G	H	I,J,K	J	L,M
durée d_i	2	1	1	2	1	2	8	2	1	5	1	5	1	1

1. Représenter le graphe-événements de la méthode PERT. Le graphe doit comporter 14 sommets numérotés de 0 à 13.
2. Déterminer la durée minimale de réalisation du projet. Quelles sont les tâches critiques ?
3. De combien faut-il diminuer la durée de la tâche J pour rendre critique une tâche supplémentaire et laquelle ?

Exercice 3. *Ordonnancement et PL*

Un processus industriel de fabrication a été décomposé en 6 tâches distinctes qui doivent toutes être entièrement réalisées. Un atelier est chargé de réaliser ces 6 tâches. L'atelier dispose de suffisamment de ressources pour être capable d'exécuter plusieurs ou même toutes les tâches en même temps. Chaque tâche i requiert une durée d'exécution d_i (cf. tableau ci-dessous). On notera t_i le temps de commencement de la tâche i et T désigne le temps final où toutes les tâches ont été exécutées. Ces variables sont *positives ou nulles.*

On cherche à minimiser le temps T avec les contraintes suivantes imposées :

(a) Chacune des tâches doit se terminer avant le temps final T (6 contraintes).

(b) Certaines tâches ne peuvent commencer que si d'autres tâches ont été complètement exécutées précédemment. Ces contraintes d'antériorité sont indiquées dans le tableau ci-dessous (5 contraintes).

tâche i	durée d_i	tâche précédente (contrainte d'antériorité)
1	3	–
2	5	–
3	2	2, 6
4	7	3, 5
5	10	1
6	6	–

Par exemple, ce tableau indique que la tâche 1 ne nécessite aucune tâche précédente, alors que la tâche 3 ne peut pas commencer avant que les tâches 2 et 6 soient terminées.

1. *Modélisation.*
   (a) Modéliser ce problème à l'aide d'un programme linéaire portant sur les variables positives ou nulles $t_1, \cdots, t_6$ et T.
   (b) Ecrire le problème obtenu sous la forme

$$\min_{\mathbf{z}\in\mathbb{R}^7} \left[F(\mathbf{z}) = \mathbf{c}^\top \mathbf{z}\right]$$
$$\begin{cases} A\mathbf{z} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{z} \geq 0 \end{cases}$$

   en précisant bien ce que valent les vecteurs $\mathbf{c}$, $\mathbf{b}$ et la matrice A.

2. *Etude et résolution.* Soit $(t_1, \cdots, t_6, T)$ une solution réalisable.
   (a) Montrer que $t_i + d_i \leq t_4$, pour tout $i \neq 4$ et en déduire que

$$t_4 + d_4 = \max_{j\in[\![1,6]\!]} (t_j + d_j)$$

   (b) Montrer que $z^* = (t_1, \cdots, t_6, T^*)$ avec $T^* = t_4 + d_4$ est aussi une solution réalisable et que T^* est la plus petite valeur possible pour T.
   (c) Sur un axe horizontal représentant le temps, positionner les temps t_1, t_4, t_5 et T^* en représentant aussi les durées d_1, d_4, d_5. Même chose sur un autre axe horizontal pour t_2, t_3, t_4 et T^* puis pour t_3, t_4, t_6 et T^*.
   (d) En déduire une solution optimale.