

Mathématiques Numériques MN1

Chapitre 3 : Systèmes linéaires et décompositions de matrice

Partie I : Factorisation LU

Bruno Pinçon / J.-F. Scheid

Télécom Nancy 1A

2025-2026

Version du 6/3/2025

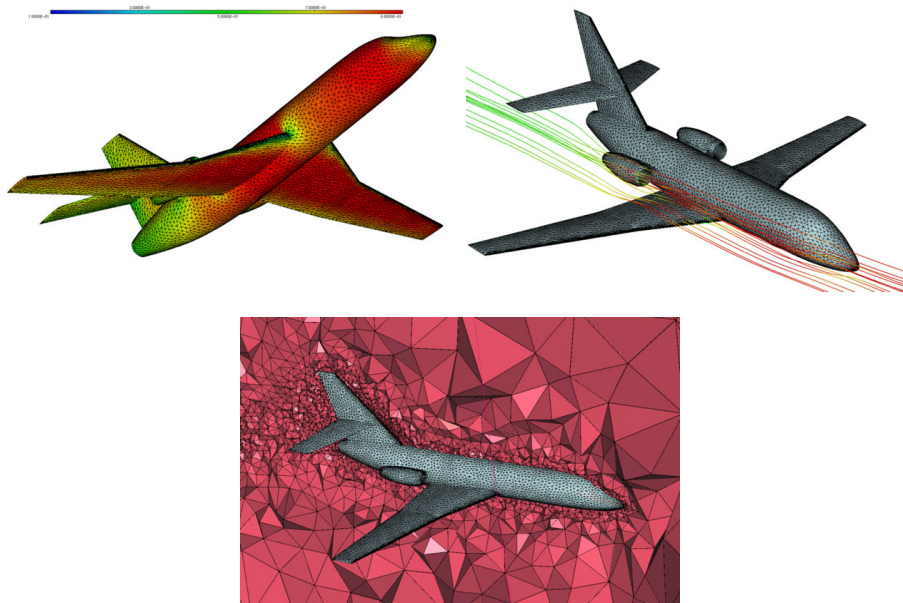
- 1 Introduction
- 2 Notations et rappels sur les matrices
- 3 En pratique...
- 4 Résoudre un système triangulaire
- 5 Méthode de Gauss : “triangulariser” un système linéaire
- 6 Factorisation LU : écriture matricielle de la méthode de Gauss
- 7 Factorisation de Cholesky
- 8 Factorisation QR
- 9 Décomposition SVD

1. Introduction

Résoudre un système linéaire est une opération très courante.

- Un grand nombre de problèmes d'ingénierie conduisent, après modélisation puis éventuellement une procédure de discrétisation, à résoudre des systèmes linéaires : *calculs sur des réseaux électriques ou hydrauliques en régime stationnaire, calculs de structures, jeux vidéos, météo, écoulements de fluides, etc...*
- Cette opération intervient aussi comme “sous-procédure” dans de nombreux algorithmes : *problèmes d'interpolation, approximation par moindres carrés, résolution de systèmes non-linéaires, optimisation (cf. cours de GRO en 2A), automatique, traitement du signal, etc...*

- Généralement, pour les problèmes concrets, on est amené à résoudre de grands systèmes linéaires (plusieurs millions/milliards d'inconnues ...).
- Certains problèmes (beaucoup) conduisent à des systèmes linéaires à résoudre avec une matrice *creuse* c'est-à-dire qui comporte beaucoup de zéros (stockage adapté, e.g. sous-module sparse de Scipy/Python).



Visualisation du champ de vitesse autour d'un avion (Dassault Aviation)

Un exemple. Equations de Navier-Stokes (stationnaires).

Vitesse $u = u(x) \in \mathbb{R}^3$ et pression $p = p(x) \in \mathbb{R}$.

Discrétisation $\Rightarrow v = (u, p)$ solution du système linéaire $Av = b$
avec A matrice de taille (n, n)

N noeuds dans une direction

$$\Rightarrow \begin{cases} N^3 \text{ noeuds dans le cube} \\ n = 3 \times (2N)^3 + N^3 = 25N^3 \text{ inconnues} \end{cases}$$

Avec $N = 100$:

$n = 25 \cdot 10^6$ inconnues,

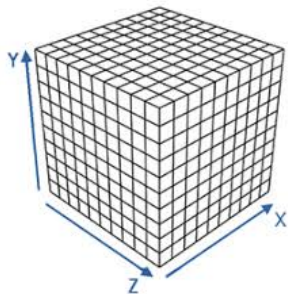
$n^2 = 6.25 \cdot 10^{14}$ coefficients dans A .

En double précision (8 octets), il faut

$$8 \times 6.25 \cdot 10^{14} \text{ octets} \simeq 4500 \text{ To}$$

pour stocker les coefficients de A ...

(La matrice A est creuse, $\simeq 10^8$ éléments non nuls $\rightarrow \simeq 5\text{Go}$)



2. Notations et rappels sur les matrices

Le problème est le suivant : étant donné une matrice A et un vecteur b (les **données du problème**), trouver le vecteur x solution de

$$Ax = b \quad \text{avec} \quad \begin{cases} A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n \times n} \\ x \in \mathbb{R}^n \\ b \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (1)$$

La matrice A est ici *carrée* (autant de lignes que de colonnes).

Notations :

- En notation matricielle, un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ sera toujours représenté par le vecteur colonne

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

et le vecteur *transposé* est le vecteur *ligne* défini par

$$x^T = (x_1, \dots, x_n).$$

- Soit A est une matrice de taille (n, m) .
 - ▶ A_i désigne la matrice de taille $(1, m)$, appelée aussi *vecteur ligne*, formée par la i -ème ligne de A .
 - ▶ A^j désigne la matrice de taille $(n, 1)$, appelée aussi *vecteur colonne*, formée par la j -ème colonne de A .

Rappels sur les matrices.

1. Produit matriciel. Si A est une matrice de taille (n, m) et B une matrice de taille (m, p) alors le produit matriciel AB est bien défini et donne une matrice de taille (n, p) avec :

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj}, \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$$

2. Matrice transposée. Si A est une matrice de taille (n, m) alors $A^\top$, la transposée de A est une matrice de taille (m, n) avec

$$(A^\top)_{ij} = a_{ji}$$

(les lignes de A forment les colonnes de $A^\top$).

- Si $A^\top = A$, la matrice A est dite *symétrique*.
- Si A est une matrice de taille (n, m) et B une matrice de taille (m, p) alors

$$(AB)^\top = B^\top A^\top$$

3. Produit scalaire.

- Si x et y sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ alors :

$$(x | y) := x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

est le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$. Il permet de généraliser la notion d'orthogonalité usuelle. On remarque que

$$(x | y) = x^\top y = y^\top x \quad (2)$$

- Si A est une matrice de taille (n, m) et B une matrice de taille (m, p) , alors

$$(AB)_{ij} = (A_i | B^j) \quad (3)$$

- Si A est une matrice de taille (n, m) , sa matrice transposée $A^\top$ est caractérisée par la propriété suivante (exercice) :

$$(Ax \mid y) = (x \mid A^\top y), \quad \forall x \in \mathbb{R}^m, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \quad (4)$$

4. Déterminant d'une matrice. On peut définir le déterminant de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ comme l'application *multi-linéaire alternée* des colonnes de A dans $\mathbb{R}$ qui vaut 1 sur la matrice identité. C'est à dire que $\det(A) := \det(A^1, A^2, \dots, A^n)$ où :

- *multilinéaire* veut dire linéaire en chacun des arguments :

$$\det(\dots, \alpha u + \beta v, \dots) = \alpha \det(\dots, u, \dots) + \beta \det(\dots, v, \dots)$$

- *alternée* veut dire que le déterminant est nul si deux arguments sont identiques :

$$\det(\dots, u, \dots, u, \dots) = 0$$

- et enfin $\det(e^1, \dots, e^n) = 1$ où e^i désigne le i -ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Quelques propriétés du déterminant.

- Si on échange deux colonnes d'un déterminant, il change de signe :

$$\det(\dots, u, \dots, v, \dots) = -\det(\dots, v, \dots, u, \dots)$$

- **Formules de Laplace.** Un déterminant peut se calculer récursivement par les formules de Laplace :
 - ▶ Développement par rapport à la colonne j de la matrice :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det([A]_{(-i,-j)})$$

- ▶ Développement par rapport à la ligne i de la matrice :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det([A]_{(-i,-j)})$$

où $[A]_{(-i,-j)}$ est la matrice obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de A .

On se ramène ainsi à des calculs de déterminants de matrices $(n-1, n-1)$, et, comme on sait calculer le déterminant d'une matrice $(1, 1)$: $\det(a) = a$; on peut en déduire une méthode de calcul (très inefficace) d'un déterminant quelconque.

- On a $\det(A^\top) = \det(A)$.
- Si A et B sont 2 matrices de taille (n, n) alors

$$\det(AB) = \det(A) \det(B)$$

- Déterminant d'une matrice *triangulaire* T :

$$\det(T) = \prod_{i=1}^n t_{ii}$$

5. Matrice inversible.

- Une matrice carrée A est *inversible* s'il existe une matrice (unique si elle existe), notée A^{-1} et appelée *matrice inverse* de A telle que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

où I désigne la matrice identité ($I_{ij} = \delta_{ij}$ symbole de Kronecker)

- Une matrice A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.
- Si A et B sont inversibles alors

$$(A^{\top})^{-1} = (A^{-1})^{\top}$$

et la matrice AB est aussi inversible avec

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

- Si $AA^{\top} = A^{\top}A = I$, la matrice A est dite *orthogonale*; elle est alors inversible et $A^{-1} = A^{\top}$.

3. En pratique...

On veut résoudre un système linéaire carré.

Quelques questions et remarques :

- ① Vous avez appris en 1er cycle comment résoudre un système linéaire par une méthode de type Gauss. Est-ce la bonne méthode ?

Réponse : oui ! Voilà une bonne nouvelle.

En particulier, on n'utilise jamais les formules de Cramer car elles nécessitent le calcul de déterminants qui requièrent un nombre trop important d'opérations élémentaires.

Attention, en premier cycle on apprend plutôt la méthode de Gauss-Jordan qui permet d'obtenir directement la solution ; dans ce cours on va utiliser la méthode de Gauss qui conduit, partant de $Ax = b$ à obtenir un système linéaire équivalent $Ux = b'$ où U est une matrice triangulaire supérieure (il y a donc une étape supplémentaire).

Néanmoins, on peut montrer (malgré l'étape supplémentaire de la résolution du système triangulaire) que c'est la méthode la plus économique et c'est donc elle qui est dans les bonnes bibliothèques d'algèbre linéaire.

Il existe cependant d'autres méthodes dites itératives (comme le gradient conjugué, GMRES, etc.) qui sont utilisées pour résoudre certains grands systèmes linéaires creux (creux veut dire que la matrice comporte une très grande majorité de coefficients nuls).

- ② Peut-on calculer A^{-1} et en déduire la solution du système linéaire par la formule $x = A^{-1}b$?

Réponse : Non, surtout pas ! On ne calcule jamais A^{-1} pour résoudre $Ax = b$. Numériquement, c'est le contraire qui se produit : le calcul de A^{-1} (ainsi d'ailleurs que celui de $\det(A)$, voir ci-dessous), sont des sous-produits des méthodes de résolution de systèmes. Ainsi, le calcul de A^{-1} s'effectuera en résolvant successivement les n systèmes

$$Ax^i = e^i, \quad i = 1, \dots, n$$

La i -ème colonne de A^{-1} est donnée par x^i .

- ③ Doit-on d'abord vérifier que $\det(A) \neq 0$ avant de tenter un calcul ?

Réponse : non, on découvre l'inversibilité par la méthode de Gauss (le déterminant de A s'obtient comme un sous-produit de cette méthode, dans la plupart des cas c'est la méthode la plus rapide pour le calculer !).

- ④ On a souvent plusieurs systèmes linéaires à résoudre avec la même matrice : $Ax^{(k)} = b^{(k)}$, $k = 1, \dots, K$. Les différents seconds membres $b^{(k)}$ n'étant pas forcément connus au même moment (par exemple $b^{(2)}$ peut dépendre de $x^{(1)}$...).
Comment optimiser les calculs ?

Réponse : en réinterprétant la méthode de Gauss comme une factorisation/décomposition de la matrice A (cf. la partie "Décompositions de matrice" de ce chapitre).

- ⑤ En arithmétique flottante, on sait que chaque calcul élémentaire peut être entaché d'une erreur (généralement très petite) ; si A est inversible, (auquel cas on devrait pouvoir calculer la solution) quels critères pourraient nous permettre d'avoir une indication sur la précision de la solution obtenue ?

Réponse : on pourrait penser que la quantité $|\det(A)|$ pourrait donner une indication : si $|\det(A)| \gg 1$ est grand alors (avec une bonne méthode de Gauss) on peut espérer que les petites erreurs ne s'amplifient pas trop... Il n'en est rien, la bonne notion est celle de conditionnement de la matrice A :

$$\text{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

(cf. Chapitre 3.)

4. Résoudre un système triangulaire

Résoudre $Tx = b$ est assez simple lorsque la matrice T est triangulaire supérieure avec

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & t_{nn} \end{pmatrix}$$

($t_{ij} = 0$ pour $j < i$). Le système $Tx = b$ s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{rclclcl} t_{11}x_1 + & t_{12}x_2 & + \dots & \dots & + t_{1n}x_n & = & b_1 \\ & t_{22}x_2 & + \dots & \dots & + t_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & t_{n-1,n-1}x_{n-1} & + t_{n-1,n}x_n & = & b_{n-1} \\ & & & & t_{nn}x_n & = & b_n \end{array} \right.$$

On montre que $\det(T) = \prod_{k=1}^n t_{kk}$ (cf TD Feuille 3) et donc T est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux t_{ii} sont non nuls.

Pour résoudre un tel système, on commence (**étape 1**) par résoudre la dernière équation pour déterminer $x_n = b_n/t_{nn}$; on substitue le résultat obtenu pour x_n dans l'équation précédente ce qui permet de calculer x_{n-1} (**étape 2**) et ainsi de suite...

$$\left\{ \begin{array}{l} x_n = b_n/t_{nn} \\ x_{n-1} = (b_{n-1} - t_{n-1,n}x_n)/t_{n-1,n-1} \\ \vdots \\ x_i = (b_i - t_{i,n}x_n - t_{i,n-1}x_{n-1} - \cdots - t_{i,i+1}x_{i+1})/t_{ii} \\ \vdots \\ x_1 = \cdots \end{array} \right.$$

Cette procédure s'appelle *résolution par remontée*.

Algorithme de remontée

pour $i = n, n - 1, \dots, 1$
 $x_i \leftarrow (b_i - \sum_{j=i+1}^n t_{ij} x_j) / t_{ii}$

ou encore en écrivant la somme en pseudo-code :

pour $i = n, n - 1, \dots, 1$
 $temp \leftarrow b_i$
 pour $j = i + 1, \dots, n$
 $temp \leftarrow temp - t_{ij} x_j$
 $x_i \leftarrow temp / t_{ii}$

Nombre d'opérations arithmétiques (cf TD Feuille 3) :

$C_{remontee} : \frac{n(n-1)}{2}$ multiplications, $\frac{n(n-1)}{2}$ additions, n divisions

De même il est tout aussi facile de résoudre un système triangulaire inférieur (exercice).

5. Méthode de Gauss : “triangulariser” un système linéaire

La méthode de Gauss consiste à effectuer des transformations successives ($n - 1$ en tout) sur le système $Ax = b$ pour obtenir un système linéaire *équivalent* dont la matrice est *triangulaire*

supérieure :

$$\boxed{Ax = b} \xrightarrow{tr.1} A^{(1)}x = b^{(1)} \xrightarrow{tr.2} A^{(2)}x = b^{(2)} \dots \xrightarrow{tr.(n-1)} \boxed{A^{(n-1)}x = b^{(n-1)}}$$

avec $U := A^{(n-1)}$ **triangulaire supérieure**

Le système $Ax = b$ s'écrit aussi :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n & = & b_i \\ & \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{array} \right.$$

1ère étape.

Idée : éliminer la variable x_1 des équations $2, 3, \dots, n$.

- (i) *Recherche d'un pivot non nul* : si $a_{11} = 0$, on cherche alors $a_{i^*1} \neq 0$ et on échange les équations 1 et i^* .

Rmq : si tous les coefficients de la première colonne de A sont nuls alors $\det(A) = 0$.

- (ii) Supposons donc $a_{11} \neq 0$ (toujours possible modulo un échange de lignes si A est inversible). Idée : soustraire la première équation multipliée par le “bon” coefficient à la deuxième équation, de façon à éliminer la variable x_1 dans la nouvelle (deuxième) équation ainsi obtenue. On recommence ensuite cette manip sur l'équation 3, puis sur la 4, etc, et enfin sur la dernière. Pour $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$, on détermine les nouvelles équations $equ_i^{(1)}$ par :

$$equ_i^{(1)} := equ_i - coef_i^{(1)} \times equ_1$$

ce qui s'écrit encore

$$\underbrace{(a_{i1} - \text{coef}_i^{(1)} a_{11})}_{=a_{i1}^{(1)}} x_1 + \underbrace{(a_{i2} - \text{coef}_i^{(1)} a_{12})}_{=a_{i2}^{(1)}} x_2 + \cdots + \underbrace{(a_{ij} - \text{coef}_i^{(1)} a_{1j})}_{=a_{ij}^{(1)}} x_j + \cdots + \underbrace{(a_{in} - \text{coef}_i^{(1)} a_{1n})}_{=a_{in}^{(1)}} x_n = \underbrace{b_i - \text{coef}_i^{(1)} b_1}_{=b_i^{(1)}}$$

① On a $a_{i1}^{(1)} = 0 \iff$

$$\boxed{\text{coef}_i^{(1)} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}}$$

- ②
- ▶ Pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$: $a_{1j}^{(1)} = a_{1j}$ et $b_1^{(1)} = b_1$ (première ligne inchangée).
 - ▶ Pour $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$: $a_{i1}^{(1)} = 0$ (plus de dépendance en x_1)
 - ▶ Pour $i, j \in \llbracket 2, n \rrbracket$: $a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \text{coef}_i^{(1)} a_{1j}$
 $b_i^{(1)} = b_i - \text{coef}_i^{(1)} b_1$

On obtient donc le (nouveau mais équivalent) système linéaire :

$$A^{(1)}x = b^{(1)} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ 0 + a_{22}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ 0 + a_{n2}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)} \end{cases}$$

Remarques sur la transformation $Ax = b \Leftrightarrow A^{(1)}x = b^{(1)}$:

- ① La transformation est **inversible** : si on utilise $equ_i^{(1)} + coef_i^{(1)} \times equ_1^{(1)}$ on retrouve les équations initiales !
Ainsi toute solution de $Ax = b$ sera une solution de $A^{(1)}x = b^{(1)}$ et inversement : les deux systèmes sont équivalents (en ce sens qu'ils ont les mêmes solutions).

- ② Les manipulations sur les équations du système sont équivalentes à des manipulations sur les lignes de la matrice A et du vecteur b : éliminer l'inconnue x_1 des équations $2, 3, \dots, n$ correspond à faire apparaître des zéros sous la diagonale dans la première colonne de la matrice $A^{(1)}$ avec les opérations :

$$\boxed{A_i^{(1)} = A_i - \text{coef}_i^{(1)} \times A_1} \quad \text{pour } 2 \leq i \leq n. \quad (5)$$

(On rappelle que A_i désigne la i -ème ligne de la matrice A). Il faut bien sûr appliquer la même transformation sur b .

- ③ En choisissant $\text{coef}_1^{(1)} = 0$ la manipulation sur la première équation (cad l'identité !) rentre dans ce formalisme.
- ④ La transformation (5) est **linéaire**, on verra qu'elle correspond à la multiplication par une matrice inversible $M^{(1)}$: on a

$$\boxed{A^{(1)} = M^{(1)} A} \quad \text{et} \quad \boxed{b^{(1)} = M^{(1)} b}$$

Et la suite ? La deuxième étape revient à faire exactement la même chose sur le sous-système (**en rouge**) constitué par les équations $2, 3, \dots, n$.

☛ Comme ce sous-système ne dépend pas de la variable x_1 , c'est un système de $(n - 1)$ équations à $(n - 1)$ inconnues, sur lequel on applique la même technique :

- si le coefficient $a_{22}^{(1)} \neq 0$ on procède tout de suite à la phase d'élimination de l'inconnue x_2 dans les équations $3, 4, \dots, n$;
- sinon on cherche un coefficient non nul :

$$a_{i^*2}^{(1)} \neq 0, \quad 3 \leq i^* \leq n$$

puis on échange les équations 2 et i^* et l'on procède alors à la phase d'élimination.

Remarque sur les pivots :

- si A est *inversible*, on peut toujours trouver $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$ tel que $a_{i2}^{(1)} \neq 0$. En effet comme la matrice $A^{(1)}$ a le découpage par blocs suivant :

$$A^{(1)} = \left(\begin{array}{c|ccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{array} \begin{array}{c} [A^{(1)}]_{(-1,-1)} \end{array} \right)$$

le calcul de son déterminant (en développant par rapport à la première colonne) donne :

$$\det(A^{(1)}) = a_{11} \det([A^{(1)}]_{(-1,-1)}).$$

D'autre part comme $Ax = b$ et $A^{(1)}x = b^{(1)}$ sont équivalents, A est inversible **ssi** $A^{(1)}$ l'est ! Donc

$$\det(A) \neq 0 \iff \det(A^{(1)}) \neq 0.$$

Ainsi, comme $a_{11} \neq 0$, la première colonne de la matrice $[A^{(1)}]_{(-1,-1)}$ ne peut être nulle (sinon son déterminant serait nul et par conséquent celui de $A^{(1)}$ aussi), c-a-d qu'il existe bien $i^* \in \llbracket 2, n \rrbracket$ tel que $a_{i^*2}^{(1)} \neq 0$.

- De la même façon, on montre que ce résultat est aussi vrai pour les étapes suivantes :

Si A est *invertible*, on peut trouver à chaque étape k de la méthode de Gauss, un coefficient non nul :

$$a_{i^*k}^{(k-1)} \neq 0, \text{ avec } i^* \in \llbracket k, n \rrbracket$$

Ainsi la méthode de Gauss marche toujours sur une matrice *invertible* (en arithmétique exacte!).

Et la fin ? Au bout de $(n - 1)$ étapes (qui consistent donc toutes à faire la même chose sur des systèmes linéaires de plus en plus petits), on obtient le système linéaire équivalent

$$\boxed{A^{(n-1)}x = b^{(n-1)}}$$

où la matrice $A^{(n-1)}$ est triangulaire supérieure :

$$U := A^{(n-1)} = \begin{pmatrix} a_{11} & \times & \dots & \times \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn}^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

avec ses éléments diagonaux (les pivots) $a_{ii}^{(i-1)}$ tous non nuls.

Il suffit alors d'utiliser l'algorithme vu dans la section précédente pour résoudre ce système triangulaire.

6. Factorisation LU : écriture matricielle de la méthode de Gauss

Écrire chaque étape de Gauss “matriciellement” va nous conduire à la notion très fructueuse de “factorisation” de la matrice initiale sous la forme :

$$A = LU \quad \text{ou} \quad PA = LU$$

où :

- L est une matrice **triangulaire inférieure** (elle contient “l’historique” de la méthode de Gauss qui ne dépend que de la matrice A (et pas du second membre b)).
- U est simplement la matrice **triangulaire supérieure** obtenue à la fin du procédé : $U = A^{(n-1)}$.
- P est une matrice de *permutation* qui “enregistre” les éventuelles permutations de lignes pour trouver un pivot non nul (ou le plus grand pivot possible si on utilise la stratégie du pivot partiel).

1. Action d'une matrice du type $M = I - z(e^k)^\top$

Soit B une matrice de taille (n, m) , on regarde la transformation opérée par la multiplication MB où

$$M := I - z(e^k)^\top = \begin{pmatrix} 1 & & & -z_1 & & \\ & \ddots & & \vdots & & \\ & & 1 & -z_{k-1} & & \\ & & & 1 - z_k & & \\ & & & -z_{k+1} & 1 & \\ & & & \vdots & & \ddots \\ & & & -z_n & & & 1 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$
 k

avec $z \in \mathbb{R}^n$, e^k le k -ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et I la matrice identité.

Propriétés

- ① On a $(MB)_i = B_i - z_i B_k$, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, autrement dit :

$$MB = \begin{pmatrix} \frac{B_1 - z_1 B_k}{B_2 - z_2 B_k} \\ \vdots \\ B_n - z_n B_k \end{pmatrix}.$$

☛ La multiplication de B par M transforme chaque ligne i de B en retranchant la ligne k multipliée par le coefficient z_i .

- ② Si $z_k = 0$ alors la matrice M est inversible et son inverse vaut :

$$L = M^{-1} = I + z(e^k)^\top$$

Preuve (exercice).

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad (MB)_{ij} &= \sum_{l=1}^n M_{il} B_{lj} \\ &= \begin{cases} 1 \times B_{ij} - z_i B_{kj} & \text{si } i \neq k \\ (1 - z_k) B_{kj} & \text{si } i = k \end{cases} \\ &= B_{ij} - z_i B_{kj} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad LM &= (I + z(e^k)^\top)(I - z(e^k)^\top) \\ &= I + \underbrace{z(e^k)^\top - z(e^k)^\top}_{0} - z(e^k)^\top z(e^k)^\top \\ &= I - z((e^k)^\top z)(e^k)^\top \\ &= I - z(\underbrace{z|e^k}_{z_k=0})(e^k)^\top \\ &= I \end{aligned}$$

2. Factorisation LU

Avec cet outil (les matrices “ M ”), on obtient facilement les matrices qui permettent de passer d’une étape à l’autre dans la méthode de Gauss (l’échange des lignes pour trouver un pivot non nul, est lui obtenu par une matrice de permutation élémentaire ; nous en parlerons plus loin) :

- **Etape 1.** On a $A^{(1)} = M^{(1)}A$ et $b^{(1)} = M^{(1)}b$ avec $M^{(1)} = I - z^{(1)}(e^1)^\top$ et

$$z^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_{21}/a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1}/a_{11} \end{pmatrix}$$

qui contient les coefficients d’élimination de chaque ligne de l’étape 1.

En effet, $M^{(1)}$ effectue bien les opérations attendues sur les lignes :

$$\begin{cases} A_1^{(1)} = A_1 - 0 \times A_1 = A_1 \\ A_i^{(1)} = A_i - z_i^{(1)} \times A_1 \text{ pour } 2 \leq i \leq n \end{cases}$$

(et on a le même effet sur b bien sûr).

- **Etape k** ($1 \leq k \leq n - 1$). La matrice $A^{(k-1)}$ est de la forme :

$$A^{(k-1)} = \begin{pmatrix} a_{11} & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \times & \times & \times & \times \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times & \times & \times \\ \vdots & \dots & 0 & a_{kk}^{(k-1)} & \times & \times \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \times & \times \\ 0 & \dots & 0 & a_{nk}^{(k-1)} & \times & \times \end{pmatrix}$$

Si $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$ (dans le cas contraire il faut au préalable, échanger la ligne k avec une ligne $i > k$ de façon à obtenir un pivot non nul), on peut procéder à l'élimination de la variable x_k dans les équations $k + 1, \dots, n$, en utilisant la matrice

$$M^{(k)} = I - z^{(k)}(e^k)^\top$$

avec :

$$z^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{k+1,k}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)} \\ \vdots \\ a_{nk}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M^{(k)} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & -z_{k+1}^{(k)} & \ddots & \\ & & & \vdots & \ddots & \ddots \\ & & & -z_n^{(k)} & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice $A^{(k)} = M^{(k)} A^{(k-1)}$ est de la forme

$$A^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{11} & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \times & \times & \times & \times & \times \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times & \times & \times & \times \\ \vdots & \dots & 0 & a_{kk}^{(k-1)} & \times & \times & \times \\ \vdots & \dots & \vdots & \mathbf{0} & a_{k+1,k+1}^{(k)} & \times & \times \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \times & \times \\ 0 & \dots & 0 & \mathbf{0} & a_{n,k+1}^{(k)} & \times & \times \end{pmatrix}$$

Remarques.

- Puisque $z_k^{(k)} = 0$, la matrice $M^{(k)}$ est inversible d'inverse

$$L^{(k)} = I + z^{(k)}(e^k)^\top.$$

Elle est aussi triangulaire inférieure puisque les k premières composantes de $z^{(k)}$ sont nulles.

- De plus, comme les coefficients diagonaux de cette matrice triangulaire sont tous égaux à 1, on a aussi $\det(M^{(k)}) = 1$ (de même pour son inverse $L^{(k)}$, cf TD Feuille 3).

Théorème 1 : Factorisation $A = LU$

Soit une matrice A de taille (n, n) inversible et telle qu'à chaque étape de la méthode de Gauss on ait (sans procéder à des échanges de lignes) :

$$a_{kk}^{(k-1)} \neq 0 \quad \forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket. \quad (1)$$

Alors il existe une unique factorisation de la matrice A de la forme :

$$A = LU$$

où L est une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité (c-a-d que $l_{ii} = 1, \forall i$) et U est une matrice triangulaire supérieure inversible.

Remarque. Une condition équivalente à (1) est de demander que toutes les sous-matrices diagonales

$$\Delta_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix} \text{ soient inversibles, pour tout } k \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

Preuve abrégée : On pose $U = A^{(n-1)}$ la dernière matrice obtenue, qui possède donc les propriétés attendues, sauf qu'il reste à montrer que $a_{nn}^{(n-1)} \neq 0$. On a :

$$U = A^{(n-1)} = M^{(n-1)} A^{(n-2)} = M^{(n-1)} M^{(n-2)} \dots M^{(1)} A$$

où les matrices $M^{(k)}$ sont de la forme $M^{(k)} = I - z^{(k)}(e^k)^\top$ avec $z_i^{(k)} = 0$ pour $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$.

Si on prend les déterminants de l'équation ci-dessus :

$$\det(U) = \prod_{i=1}^n a_{ii}^{(i-1)} = \left(\prod_{i=1}^{n-1} \det(M^{(i)}) \right) \det(A) = \det(A)$$

car $\det(M^{(i)}) = 1$, par conséquent on a nécessairement $a_{nn}^{(n-1)} \neq 0$.

En multipliant à gauche l'expression de U successivement par les inverses $L^{(n-1)}, L^{(n-2)}, \dots, L^{(1)}$, on obtient :

$$A = L^{(1)}L^{(2)} \dots L^{(n-1)}U$$

On pose alors

$$L = L^{(1)}L^{(2)} \dots L^{(n-1)}.$$

Comme produit de matrices triangulaires inférieures à diagonale unité, L est aussi triangulaire inférieure à diagonale unité (cf TD Feuille 3). Pour l'unicité, voir aussi le TD, Feuille 3. □

Détermination de L .

Pour le calcul effectif de la matrice L , on a un résultat assez fort : elle s'obtient **sans aucun calcul supplémentaire** puisque :

$$L = I + \sum_{k=1}^{n-1} z^{(k)}(e^k)^\top = I + \left(z^{(1)} \mid z^{(2)} \mid \dots \mid z^{(n-1)} \mid 0 \right)$$

soit encore

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ z_2^{(1)} & 1 & & & & \\ z_3^{(1)} & z_3^{(2)} & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 & \\ z_n^{(1)} & z_n^{(2)} & \dots & \dots & z_n^{(n-1)} & 1 \end{pmatrix}$$

où les $z^{(k)}$ sont les coefficients d'élimination à l'itération k .

Ce résultat s'établit en généralisant le calcul suivant : le produit de deux matrices $L^{(k)}L^{(k')}$ avec $k < k'$ est égal à :

$$L^{(k)}L^{(k')} = I + z^{(k)}(e^k)^\top + z^{(k')}(e^{k'})^\top$$

(faire le calcul).

Détermination de L

La matrice L est obtenue *sans aucun calcul supplémentaire* en stockant colonne par colonne, à chaque étape k de l'élimination de Gauss, les coefficients $z^{(k)}$ de l'élimination.

Exemple. Factorisation LU de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1ère étape. On conserve la première ligne de A (cad $A_1^{(1)} = A_1$).

$$\begin{aligned} A_2^{(1)} &= A_2 - \mathbf{1/2} \times A_1 \\ A_3^{(1)} &= A_3 - \mathbf{3/2} \times A_1 \end{aligned} \quad \rightarrow z^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{1/2} \\ \mathbf{3/2} \end{pmatrix}$$

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1/2 & -3 \\ 0 & -1/2 & -5 \end{pmatrix}, \quad L^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{1/2} & 1 & 0 \\ \mathbf{3/2} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2ème étape. On conserve la première et deuxième ligne de $A^{(1)}$ (cad $A_1^{(2)} = A_1^{(1)} = A_1$ et $A_2^{(2)} = A_2^{(1)}$).

$$A_3^{(2)} = A_3^{(1)} - \mathbf{(-1/2)/(1/2)} \times A_2^{(1)} \quad \rightarrow z^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

$$U = A^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1/2 & -3 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}, \quad L^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice L s'obtient *sans calcul* en regroupant colonne par colonne les vecteurs $z^{(1)}$ et $z^{(2)}$ des coefficients d'élimination des 2 étapes (c'est aussi la "concaténation" des matrices $L^{(1)}$ et $L^{(2)}$) :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 3/2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut vérifier qu'on a bien $A = LU$.

3. Choix du pivot

La factorisation LU repose sur l'hypothèse qu'à chaque étape de la méthode de Gauss, on a $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$ (sans avoir à effectuer des échanges de lignes).

- Pour certaines matrices qui interviennent dans la pratique (matrices à diagonale dominante, matrices définies positives), cette condition est vérifiée¹.
- En revanche, la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

n'admet pas de décomposition LU .

1. la factorisation étant de plus stable vis à vis des erreurs d'arrondi numérique dues aux calculs avec les flottants

- Même avec une matrice pour laquelle les pivots sont non-nuls, cet algorithme peut être très mauvais si $a_{kk}^{(k-1)}$ est non-nul mais *petit* car alors les erreurs d'arrondi peuvent être amplifiées.

Par exemple, considérons le système

$$\begin{pmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

dont la solution exacte est

$$x_1 = 10000/9999 \simeq 1, \quad x_2 = 9998/9999 \simeq 1$$

Si les calculs sont effectués avec 3 chiffres significatifs i.e. dans $\mathbb{F}(10, 3, \dots, \dots)$, alors la méthode de Gauss/LU donne

$$\begin{pmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 0 & -10^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -10^4 \end{pmatrix}$$

et on obtient $x_2 = 1, x_1 = 0$.

- **Stratégie de pivot partiel.** La méthode standard consiste, à chaque étape k , à rechercher d'abord le pivot maximum en valeur absolue dans la colonne k (à partir de la ligne k) :

$$a_{i_0 k}^{(k-1)} = \max_{i \in \llbracket k, n \rrbracket} |a_{ik}^{(k-1)}|$$

et à échanger les lignes k et i_0 .

Matriciellement, cela revient à considérer une matrice de permutation

$$P^{(k)} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & 1 & \\ & & & \ddots & & \\ & & 1 & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow i_0 \\ \\ \leftarrow k \\ \\ \end{matrix}$$

et de multiplier en premier par $P^{(k)}$ avant de procéder à la phase d'élimination : $A^{(k)} = M^{(k)} P^{(k)} A^{(k-1)}$.

Reprenons l'exemple précédent

$$\begin{pmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

En appliquant la stratégie de pivot partiel, on permute les lignes 1 et 2 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 10^{-4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Avec des calculs effectués avec 3 chiffres significatifs, on obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et on obtient $x_1 = 1$, $x_2 = 1$.

Cette stratégie appelée “méthode de Gauss à pivot partiel” conduit à une factorisation du type $PA = LU$ où P est une matrice de permutation.

Théorème 2 : Factorisation $PA = LU$

Soit une matrice A de taille (n, n) inversible. Alors il existe une factorisation de la matrice A de la forme :

$$PA = LU$$

où P est une matrice de permutation, L est une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité et U est une matrice triangulaire supérieure inversible.

4. Utilisation d'une factorisation pour résoudre un système linéaire.

Lorsque l'on a obtenu une factorisation $A = LU$, résoudre un système linéaire consiste à résoudre deux systèmes triangulaires :

$Ax = b \Leftrightarrow L Ux = b$, on pose $Ux = y$ et l'on résout :

- (i) $Ly = b$ on obtient y (résolution d'un système tri inf)
- (ii) $Ux = y$ on obtient x (résolution d'un système tri sup)

Le coût est donc d'environ n^2 multiplications et n^2 additions.

Dans le cas d'une factorisation $PA = LU$, la méthode ci-dessus est précédée de l'application de la permutation sur le second membre :

$$Ax = b \Leftrightarrow PAx = Pb \Leftrightarrow L Ux = Pb$$

5. Algorithme et coût de la méthode de Gauss/LU

Question : différences entre “méthode de Gauss” et “factorisation $A = LU$ ou $PA = LU$ ” ?

Réponse : presque rien ! Pour obtenir une factorisation ($A = LU$ ou $PA = LU$), on procède avec une méthode de Gauss qui agit **uniquement sur la matrice** (pas d'opérations sur un second membre) et qui **enregistre les coefficients d'élimination successifs** pour former la matrice L .

Dans le cas d'une méthode avec échange de lignes (pivot partiel qui conduit à une factorisation $PA = LU$), on enregistre aussi les permutations successives (en fait un seul tableau d'entiers de dimension n suffit).

Dans la méthode de Gauss classique, on procède aussi à la fin à la résolution du système triangulaire supérieur.

Algorithme basique factorisation $A = LU$.

Il utilise un tableau LU initialisé par copie du tableau A. La factorisation est calculée “en place” dans le tableau LU, la place laissée par les 0 de l'étape k est utilisée pour stocker les coefficients d'élimination (stockage “compact” de la factorisation).

Algorithme LU (en place)

```
LU  $\leftarrow$  A      initialisation du tableau LU par copie
pour  $k$  de 1 à  $n - 1$     boucle des  $n - 1$  étapes
    si  $LU_{k,k} = 0$ 
        arrêt de l'algorithme (gérer l'exception...)
    pour  $i$  de  $k + 1$  à  $n$     les opérations sur les lignes
         $LU_{i,k} \leftarrow LU_{i,k} / LU_{k,k}$     calcul et stockage du coef d'élimination  $z_i^{(k)}$ 
        pour  $j$  de  $k + 1$  à  $n$     mise à jour de la ligne  $i$ 
             $LU_{i,j} \leftarrow LU_{i,j} - LU_{i,k} \times LU_{k,j}$ 
```

Le tableau LU contient à la fin :

$$LU = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ l_{21} & u_{22} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & \dots & l_{n,n-1} & u_{nn} \end{pmatrix}$$

En particulier, les "1" de la diagonale de L ne sont pas stockés.

Nombre d'opérations arithmétiques. (cf TD Feuille 2)

Pour la factorisation LU :

$$C_{LU} : \begin{cases} \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = \frac{1}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2) & \text{additions et multiplications} \\ \frac{n(n-1)}{2} = \mathcal{O}(n^2) & \text{divisions} \end{cases}$$

soit $C_{LU} \simeq \frac{1}{3}n^3$ additions et multiplications.

- Pour la résolution d'un système linéaire (à partir de la factorisation), il faut rajouter un coût en $\mathcal{O}(n^2)$ additions/multiplications.
- Le coût de la factorisation $PA = LU$ avec la stratégie du pivot partiel n'est que légèrement supérieur car la recherche du coefficient maximum intervient avec un coût en $\mathcal{O}(n^2)$ (de même que les opérations d'échanges de lignes, et le coût total de la mise à jour de la permutation peut se faire avec seulement $\mathcal{O}(n)$ opérations).

6. Pourquoi formaliser Gauss en factorisation ?

- **Résolution de plusieurs (nombreux) systèmes linéaires avec la même matrice.**

Dans la pratique, on a souvent à résoudre des systèmes linéaires qui comportent tous la même matrice :

$$Ax^{(i)} = b^{(i)} \quad 1 \leq i \leq m$$

où les $b^{(i)}$ ne sont pas tous connus au même moment¹, par exemple $b^{(i)}$ s'obtient avec un calcul qui utilise $x^{(i-1)}$.

- **Calcul du déterminant.** Si A admet une factorisation $A = LU$, on a $\det(A) = \det(LU) = \det(L) \det(U) = \prod_{i=1}^n u_{ii}$.
- Le fait de pouvoir résoudre des systèmes linéaires assez rapidement en $\mathcal{O}(n^2)$ (après factorisation) a d'autres avantages comme celui de pouvoir estimer $\|A^{-1}\|$ sans avoir à calculer explicitement A^{-1} .

1. car il est simple de généraliser la méthode de Gauss classique pour qu'elle s'adapte à plusieurs seconds membres, donc en particulier au calcul de A^{-1} .