

Mathématiques Numériques

Chapitre 3 : Systèmes linéaires

Partie III : Normes vectorielles et matricielles

Bruno Pinçon / J.-F. Scheid

Télécom Nancy 1A

2025-2026

- 1 Normes vectorielles
- 2 Notions sur les normes matricielles
- 3 Conditionnement et stabilité d'un système linéaire

1. Normes vectorielles

Le concept de norme généralise la notion de longueur d'un vecteur : grâce à un seul nombre on obtient une propriété importante d'un vecteur. Une norme permet de définir aussi une notion de "distance" entre deux vecteurs x et y en calculant la norme de la différence $\|x - y\|$.

Définition 1.

Une norme est une application, notée $\| \cdot \|$, d'un espace vectoriel réel E dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant les 3 axiomes suivants :

- (i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (la norme est nulle uniquement pour le vecteur nul) ;
- (ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \forall x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ (on dit que la norme est homogène) ;
- (iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in E$. C'est l'inégalité triangulaire.

Dans $\mathbb{R}^n$, en plus de la norme euclidienne (norme usuelle), on utilise d'autres normes.

Normes dans $\mathbb{R}^n$

- *norme euclidienne* (ou norme 2) :

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$$

- *norme infinie* :

$$\|x\|_\infty = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |x_i|$$

- *norme 1* :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

- *norme p* : étant donné un réel $p \geq 1$, on considère d'une manière générale la quantité

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$$

qui définit bien une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Utilités des normes vectorielles.

(a) Distance. Avec une norme, on peut faire de la “topologie” en posant

$$d(x, y) := \|x - y\|$$

qui définit une *distance* entre deux vecteurs.

Par exemple, la boule *ouverte* de centre x et de rayon r :

$$B(x, r) := \{y \in E : \|y - x\| < r\}$$

est l'ensemble des vecteurs se situant à une “distance” strictement inférieure à r du vecteur x ; la boule *fermée* est :

$$\overline{B}(x, r) := \{y \in E : \|y - x\| \leq r\}$$

Ces boules dépendent de la norme utilisée et deux normes différentes vont définir des distances différentes (cf TD exercice 1, feuille 3).

(b) Test d'arrêt. Les normes vectorielles sont utiles dans les algorithmes travaillant avec des vecteurs où l'on doit arrêter l'algo. sur un critère de proximité entre deux vecteurs. Quelques exemples :

- ➊ arrêt de l'algorithme lorsque la distance (absolue) est inférieure à une tolérance ϵ (qui peut être précisée par l'utilisateur) :

$$\|x - y\| \leq \epsilon$$

- ➋ souvent on préfère une sorte de distance "relative" tenant compte de la magnitude des vecteurs ; on peut alors utiliser :

$$\|x - y\| \leq \epsilon \max\{\|x\|, \|y\|\}$$

- ➌ mélange test relatif et test absolu (ce dernier étant préférable lorsque $\|x\|$ et $\|y\| \ll 1$) :

$$\|x - y\| \leq \epsilon \max\{s, \|x\|, \|y\|\}$$

Par exemple avec $s = 10^{-3}$:

- ▶ pour $\max\{\|x\|, \|y\|\} \geq 10^{-3}$, le test est en erreur relative :

$$\|x - y\| \leq \epsilon \max\{\|x\|, \|y\|\}$$

- ▶ sinon, on a un test en erreur absolue avec la tolérance $10^{-3}\epsilon$:

$$\|x - y\| \leq 10^{-3} \epsilon.$$

(c) Contrôle des erreurs d'arrondis. Les normes sont aussi utiles pour tenir compte de l'effet des erreurs d'arrondi numérique. Par exemple, si un vecteur x est codé dans la machine sans problème d'underflow ou d'overflow (on appelle $fl(x)$ le vecteur codé), on peut montrer pour toutes les normes p ainsi que la norme infinie (cf TD feuille 3) que : $\|fl(x) - x\| \leq u\|x\|$ où u désigne l'*epsilon machine*, soit aussi

$$\frac{\|fl(x) - x\|}{\|x\|} \leq u \text{ pour } x \neq 0.$$

On généralise ainsi le cas scalaire : sans underflow ni overflow l'erreur relative sur le codage d'un vecteur est aussi bornée par l'epsilon machine.

Une propriété utile des normes.

Pour tout $x, y \in E$, on a :

$$\|x - y\| \geq | \|x\| - \|y\| |$$

Preuve. On a $\|x\| = \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$ par l'inégalité triangulaire d'où :

$$\|x - y\| \geq \|x\| - \|y\|.$$

En inversant les rôles de x et y on obtient $\|y - x\| \geq \|y\| - \|x\|$ et comme

$$\|y - x\| = \| -1(x - y) \| = | -1 | \|x - y\| = \|x - y\|$$

par homogénéité d'une norme, on obtient bien l'inégalité annoncée. □

Codage en machine d'un vecteur.

Soit x un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et $\hat{x}$ son codage en machine supposé sans dépassement de capacité^a (on a donc $\hat{x}_i = fl(x_i) = x_i(1 + \epsilon_i)$ avec $|\epsilon_i| \leq \mathbf{u}$). On pose $\delta x = \hat{x} - x$. Pour toute norme p vectorielle, on a :

$$\frac{\|\delta x\|_p}{\|x\|_p} \leq \mathbf{u}, \quad \forall x \neq 0$$

a. Pas d'overflow ni d'underflow.

Preuve (cf. TD feuille 4). On a

$\delta x_i = fl(x_i) - x_i = x_i(1 + \epsilon_i) - x_i = x_i\epsilon_i, \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ donc :

$$\begin{aligned} \|\delta x\|_p &= \left(\sum_{i=1}^n |\delta x_i|^p \right)^{1/p} = \left(\sum_{i=1}^n |\epsilon_i|^p |x_i|^p \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{u}^p |x_i|^p \right)^{1/p} = \left(\mathbf{u}^p \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \\ &\leq \mathbf{u} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{(1/p)} = \mathbf{u} \|x\|_p \end{aligned}$$

Notions sur les suites convergentes.

Soit E un espace vectoriel muni de la norme $\| \cdot \|$ ¹. Une suite de vecteurs $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots$ de E est souvent notée $(x^{(k)})_{k \geq 0}$ ou plus simplement $(x^{(k)})$ (l'indice de départ n'est pas forcément 0).

Définition 2. *Convergence d'une suite*

Soit une suite de vecteurs $(x^{(k)})$ d'un espace vectoriel normé E muni de la norme $\| \cdot \|$. On dit que cette suite converge vers $x^* \in E$ et on note $\lim_{k \rightarrow +\infty} x^{(k)} = x^*$ si et seulement si la suite de réels positifs $(\|x^{(k)} - x^*\|)$ tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x^{(k)} = x^* \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} \|x^{(k)} - x^*\| = 0$$

1. on dit que E est un espace vectoriel normé (e.v.n)

Equivalence entre normes.

Définition 3. Normes équivalentes

On dit que deux normes $\|\cdot\|_{N_1}$ et $\|\cdot\|_{N_2}$ définies sur un même espace vectoriel E sont équivalentes si et seulement si il existe deux constantes $\gamma > 0$ et $\beta > 0$ telles que :

$$\gamma\|x\|_{N_1} \leq \|x\|_{N_2} \leq \beta\|x\|_{N_1}, \quad \forall x \in E$$

Remarques.

- On a alors l'encadrement suivant pour $\|x\|_{N_1}$:

$$\frac{1}{\beta}\|x\|_{N_2} \leq \|x\|_{N_1} \leq \frac{1}{\gamma}\|x\|_{N_2}, \quad \forall x \in E$$

- Si deux normes sont équivalentes, toute suite convergente pour une norme l'est aussi pour l'autre norme. (autrement dit, deux normes équivalentes définissent le même e.v.n.)

Equivalence entre toutes les normes de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 1.

Les normes infinie et 1 sont équivalentes dans $\mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_{\infty} \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_{\infty}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Preuve. On a en effet :

$$\|x\|_{\infty} = \max_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} |x_k| \leq \sum_{k=1}^n |x_k| = \|x\|_1$$

et

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k| \leq \sum_{k=1}^n \|x\|_{\infty} = n\|x\|_{\infty}$$



Remarque. En fait, on peut montrer que toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes (ce résultat reste vrai pour tout espace vectoriel de dimension finie.)

2. Normes matricielles

1. Introduction.

L'ensemble des matrices réelles de taille (m, n) , noté $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ ou $\mathbb{R}^{m \times n}$, muni de

- l'opération interne $(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$
- l'opération externe $(\alpha A)_{ij} = \alpha a_{ij}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$)

est un espace vectoriel réel de dimensions $m \times n$: on peut considérer les matrices comme des vecteurs et on doit pouvoir munir un tel espace vectoriel de normes.

- ❶ On va ainsi pouvoir définir des "voisinages" et des "boules" de matrices. Par exemple, si A est une matrice donnée, $r > 0$ et si $\|\cdot\|$ est une norme matricielle, on peut considérer la boule matricielle

$$B(A, r) := \{M \in \mathbb{R}^{m \times n} : \|M - A\| < r\}$$

Si r est suffisamment petit, on s'attend à ce que les matrices de $B(A, r)$ aient un comportement proche de celui de A .

On montrera en TD que si A est inversible, on peut alors choisir $r > 0$ (dépendant de A) tel que les matrices de $B(A, r)$ soient aussi toutes inversibles.

- ② Concernant la résolution de systèmes linéaires $Ax = b$ du fait des erreurs de codage et d'arrondi numérique commises lors des calculs, le système vraiment résolu par l'ordinateur correspond à la résolution exacte d'un système linéaire perturbé :

$$(A + \delta A)(x + \delta x) = b + \delta b$$

On veut borner l'erreur relative sur la solution $\|\delta x\|/\|x\|$ en fonction des erreurs relatives sur les données $\|\delta A\|/\|A\|$ et $\|\delta b\|/\|b\|$.

2. Norme matricielle (subordonnée)

On considère $\|\cdot\|_\alpha$ une norme vectorielle sur $\mathbb{R}^n$ et $\|\cdot\|_\beta$ une norme vectorielle sur $\mathbb{R}^m$.

Définition 4. Norme matricielle induite (ou compatible)

Une norme matricielle sur $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ induite par les normes vectorielles est une application $\|\cdot\| : \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^+$ qui vérifie les propriétés suivantes :

- (i) $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$.
- (ii) $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.
- (iii) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|, \quad \forall A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.
- (iv) $\|Ax\|_\beta \leq \|A\| \|x\|_\alpha, \quad \forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ (propriété de compatibilité avec les normes vectorielles)

Remarque. Si seules les 3 premières conditions sont satisfaites (sans la condition de compatibilité), on parle en général simplement de *norme matricielle* (non nécessairement induite).

Il existe une manière générique de construire des normes matricielles induites par des normes vectorielles.

On considère $\|\cdot\|_\alpha$ une norme vectorielle sur $\mathbb{R}^n$ et $\|\cdot\|_\beta$ une norme vectorielle sur $\mathbb{R}^m$.

Proposition 2. Norme matricielle subordonnée

L'application $\|\cdot\|_{\alpha,\beta} : \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par

$$\|A\|_{\alpha,\beta} := \sup_{x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\beta}{\|x\|_\alpha}$$

est une norme matricielle induite appelée **norme matricielle subordonnée** aux normes vectorielles utilisées.

Preuve.

- [propriété (i)] ($\|A\| = 0 \iff A = 0$, la norme est nulle uniquement pour la matrice nulle) :

$$\begin{aligned}\|A\|_{\alpha,\beta} = 0 &\Leftrightarrow \frac{\|Ax\|_{\beta}}{\|x\|_{\alpha}} = 0, \forall x \neq 0 \Leftrightarrow \|Ax\|_{\beta} = 0, \forall x \neq 0 \\ &\Leftrightarrow Ax = 0, \forall x \neq 0 \quad (\|y\| = 0 \Leftrightarrow y = 0) \\ &\Leftrightarrow A = 0\end{aligned}$$

- [propriété (ii)] ($\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$, homogénéité de la norme).

Soit λ un réel quelconque :

$$\begin{aligned}\|\lambda A\|_{\alpha,\beta} &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0} \frac{\|\lambda Ax\|_{\beta}}{\|x\|_{\alpha}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0} |\lambda| \frac{\|Ax\|_{\beta}}{\|x\|_{\alpha}} \\ &= |\lambda| \sup_{x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0} \frac{\|Ax\|_{\beta}}{\|x\|_{\alpha}} \\ &= |\lambda| \|A\|_{\alpha,\beta}\end{aligned}$$

- [propriété (iii)] (inégalité triangulaire).

Soit A et B deux matrices quelconques de $\mathbb{R}^{m \times n}$:

$$\|A + B\|_{\alpha, \beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0} \frac{\|(A + B)x\|_{\beta}}{\|x\|_{\alpha}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0} \frac{\|Ax + Bx\|_{\beta}}{\|x\|_{\alpha}}$$

Avec l'inégalité triangulaire $\|Ax + Bx\|_{\beta} \leq \|Ax\|_{\beta} + \|Bx\|_{\beta}$, il vient :

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0} \frac{\|Ax + Bx\|_{\beta}}{\|x\|_{\alpha}} &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0} \frac{\|Ax\|_{\beta} + \|Bx\|_{\beta}}{\|x\|_{\alpha}} \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0} \frac{\|Ax\|_{\beta}}{\|x\|_{\alpha}} + \sup_{x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0} \frac{\|Bx\|_{\beta}}{\|x\|_{\alpha}} \end{aligned}$$

d'où :

$$\|A + B\|_{\alpha, \beta} \leq \|A\|_{\alpha, \beta} + \|B\|_{\alpha, \beta}$$

- La quatrième propriété de *compatibilité* avec les normes vectorielles s'obtient par la définition même de $\|A\|_{\alpha,\beta}$.
En effet :

$$\|A\|_{\alpha,\beta} := \sup_{x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0} \frac{\|Ax\|_{\beta}}{\|x\|_{\alpha}} \geq \frac{\|Ax\|_{\beta}}{\|x\|_{\alpha}}, \forall x \neq 0.$$

On obtient donc (l'inégalité reste vraie aussi pour $x = 0$) :

$$\|Ax\|_{\beta} \leq \|A\|_{\alpha,\beta} \|x\|_{\alpha}, \forall x \neq 0.$$



Remarques.

- Pour les matrices carrées ($m = n$), on choisit en général la même norme vectorielle sur $\mathbb{R}^n$ (cad $\|\cdot\|_\alpha = \|\cdot\|_\beta$).
- Soit I la matrice identité de $\mathbb{R}^{n \times n}$ et $\|\cdot\|_{n,n}$ la norme matricielle subordonnée à la norme vectorielle $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^n$. Alors on a (exercice)

$$\|I\|_{n,n} = 1 \quad (1)$$

- De plus, on a

$$\|A\|_{\alpha,\beta} := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\alpha}{\|x\|_\beta} = \sup_{\|x\|_\beta=1} \|Ax\|_\alpha = \sup_{\substack{x \neq 0 \\ \|x\|_\beta \leq 1}} \frac{\|Ax\|_\alpha}{\|x\|_\beta}$$

La boule fermée unité de $\mathbb{R}^n$ étant compacte, il existe au moins un $x \neq 0$ tel que $\|Ax\|_\alpha = \|A\|_{\alpha,\beta} \|x\|_\beta$ (le sup est atteint).

Autrement dit :

$$\|A\|_{\alpha,\beta} := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\alpha}{\|x\|_\beta} = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\alpha}{\|x\|_\beta}$$

3. Propriété supplémentaire.

On note $\|\cdot\|_{m,n}$ la norme matricielle sur $\mathbb{R}^{m \times n}$ *subordonnée* à des normes vectorielles $\|\cdot\|_m$ et $\|\cdot\|_n$ sur $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$ respectivement.

Proposition 3.

Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$. On a

$$\|AB\|_{m,p} \leq \|A\|_{m,n} \|B\|_{n,p} \quad (2)$$

On dit que la norme matricielle est *sous-multiplicative*

Preuve. On a :

$$\|AB\|_{m,p} := \sup_{x \neq 0} \frac{\|ABx\|_m}{\|x\|_p}$$

$$\text{mais } \|ABx\|_m = \|A(\underbrace{Bx}_{y \in \mathbb{R}^n})\|_m \leq \|A\|_{m,n} \|Bx\|_n \leq \|A\|_{m,n} \|B\|_{n,p} \|x\|_p$$

d'où :

$$\|AB\|_{m,p} := \sup_{x \neq 0} \frac{\|ABx\|_m}{\|x\|_p} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|A\|_{m,n} \|B\|_{n,p} \|x\|_p}{\|x\|_p} = \|A\|_{m,n} \|B\|_{n,p} \quad 21$$

Remarques.

- Cette propriété permet de montrer qu'il existe des normes matricielles qui ne sont subordonnées à aucune norme vectorielle. Par exemple, la norme matricielle $\|A\|_* := \max |a_{ij}|$ n'est subordonnée à aucune norme vectorielle. En effet, avec $A = B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, on a $2 = \|AB\|_* > \|A\|_* \|B\|_* = 1$.
- Un corollaire facile de ce résultat est que pour une matrice carrée A on aura $\|A^k\| \leq \|A\|^k$ (attention ici $A^k = \underbrace{A \times A \cdots \times A}_{k \text{ fois}}$).

4. Normes matricielles subordonnées particulières.

Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. La norme matricielle subordonnée est construite avec la même norme vectorielle $\|\cdot\|_p$ ($p = 1, 2$ ou ∞) pour l'espace de départ $\mathbb{R}^n$ et l'espace d'arrivée $\mathbb{R}^m$. La norme matricielle subordonnée, notée encore $\|\cdot\|_p$ est définie par

$$\|A\|_p := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}$$

On peut calculer explicitement ces normes pour $p = 1, 2$ et ∞ .

Proposition 4.

Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. On a

$$\textcircled{1} \quad \|A\|_1 := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} = \max_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$$

$$\|A\|_\infty := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \max_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

$$\textcircled{2} \quad \|A\|_2 := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \sqrt{\rho(A^\top A)}$$

où $\rho(M)$ désigne le rayon spectral de la matrice M c'est à dire :

$$\rho(M) = \max_{\lambda \in \text{Sp}(M)} |\lambda|$$

Preuve. (cf TD, feuille 3 pour les normes 1 et ∞)

Remarques.

- Les deux normes matricielles $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont très simples à calculer avec peu d'opérations (d'ordre le nombre d'éléments $m \times n$ de la matrice). Sans entrer dans les détails, le calcul de $\|A\|_2$ est beaucoup plus coûteux, ce qui explique l'importance des normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ dans les calculs pratiques.
- Si A est une matrice carrée, *symétrique* alors $\|A\|_2 = \rho(A)$.
- Si A est une matrice *orthogonale* (i.e. $A^\top A = I$) alors

$$\|A\|_2 = 1.$$

Cette propriété sera très utile pour résoudre les problèmes de moindres carrés avec une décomposition QR où Q est orthogonale et R triangulaire supérieure.

Exercice

- ① Calculer $\|A\|_\infty$ et $\|A\|_1$ pour :

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 2 & -9 \\ 1 & 5 & -7 \\ 3 & -2 & 0.5 \end{pmatrix}$$

- ② Soit A une matrice réelle non nulle et son codage en machine $\hat{A}$ (supposé sans dépassement de capacité) on pose $\delta A = \hat{A} - A$.
Montrer que :

$$\frac{\|\delta A\|_1}{\|A\|_1} \leq \mathbf{u} \quad \text{et} \quad \frac{\|\delta A\|_\infty}{\|A\|_\infty} \leq \mathbf{u}$$

Correction :

- 1 Pour la norme infinie on fait la somme (des valeurs absolues) de chaque ligne : le max est (visiblement) atteint pour la première ligne $\|A\|_\infty = |-6| + |2| + |-9| = 17$.
Pour la norme 1, idem mais on fait la somme (des v.a.) de chaque colonne : le max est obtenu pour la dernière colonne $\|A\|_1 = |-9| + |7| + |0.5| = 16.5$.
- 2 Comme il n'y a pas de dépassement de capacité $\hat{a}_{ij} = a_{ij}(1 + \epsilon_{ij})$ avec $|\epsilon_{ij}| \leq \mathbf{u}, \forall i, j$. On a $\delta a_{ij} = \hat{a}_{ij} - a_{ij} = \epsilon_{ij} a_{ij}$. Montrons le résultat pour $\|\cdot\|_\infty$:

$$\|\delta A\|_\infty = \max_i \sum_j |\delta a_{ij}|$$

Le max est obtenu pour une certaine ligne i_* , on a donc :

$$\begin{aligned} \|\delta A\|_\infty &= \sum_j |\delta a_{i_*j}| = \sum_j |\epsilon_{i_*j} a_{i_*j}| \leq \sum_j \mathbf{u} |a_{i_*j}| \\ &\leq \mathbf{u} \sum_j |a_{i_*j}| \leq \mathbf{u} \max_i \sum_j |a_{ij}| \\ &\leq \mathbf{u} \|A\|_\infty \end{aligned}$$

5. Stabilité d'un système linéaire.

Définition 5. *Conditionnement d'une matrice*

Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice inversible. On appelle conditionnement de A pour une norme matricielle subordonnée $\|\cdot\|$, le nombre

$$\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|.$$

Le conditionnement dépend de la norme utilisée.

Proposition 5.

On a toujours $\kappa(A) \geq 1$.

Preuve. On a $1 = \|I\|$, et comme $I = AA^{-1}$, on obtient en utilisant la propriété de sous-multiplicativité de la norme subordonnée :

$$1 = \|I\| = \|AA^{-1}\| \leq \|A\| \|A^{-1}\| = \kappa(A).$$

Remarques.

- Une matrice avec $\kappa(A)$ pas trop grand (proche de 1) sera dite *bien conditionnée* et ne posera pas de problème pour la résolution d'un système linéaire (voir plus loin)

A l'inverse une matrice avec $\kappa(A) \simeq 1/\mathbf{u}$ ne pourra pas être traitée convenablement dans le système flottant utilisé (cf. TD).

En bref, le conditionnement est la bonne mesure pour l'inversibilité numérique d'une matrice en arithmétique flottante.

- Les systèmes linéaires avec les matrices orthogonales sont très bien conditionnés car leur conditionnement en norme 2 vaut 1 !
- On a $\kappa(\alpha A) = \kappa(A)$; il est donc illusoire de vouloir améliorer le conditionnement en multipliant toutes les équations d'un système par un *même* scalaire.

Pour étudier la stabilité d'un système linéaire, on aura besoin du résultat ci-dessous. On rappelle qu'une matrice carrée A est inversible si son noyau noté $\text{Ker}(A)$ est réduit à zéro :

$$A \text{ inversible} \Leftrightarrow \text{Ker}(A) := \{x \mid Ax = 0\} = \{0\}.$$

Théorème d'inversion

Soit $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telle que $\|B\| < 1$ pour une norme matricielle subordonnée alors ^a :

(i) $I - B$ est inversible

$$(ii) \quad (I - B)^{-1} = I + B + B^2 + \dots = \sum_{k \geq 0} B^k$$

$$(iii) \quad \|(I - B)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|B\|}$$

a. ici B^k désigne la k -ème puissance de la matrice B

Preuve.

- (i) : $I - B$ inversible ? Montrons que $\text{Ker}(I - B) = \{0\}$:

$$(I - B)x = 0 \Leftrightarrow x = Bx \Rightarrow \|x\| = \|Bx\| \Rightarrow \|x\| \leq \|B\|\|x\|$$

Comme $\|B\| < 1$ la dernière inégalité n'est possible que pour $x = 0$.

- (ii) : $(I - B)^{-1} = I + B + B^2 + \dots = \sum_{k \geq 0} B^k$?

Posons $S^{(K)} = \sum_{k=0}^K B^k$; la convergence de la série $I + B + B^2 + \dots$ correspond à la convergence de la suite $(S^{(K)})$.

On a

$$\begin{aligned}(I - B)S^{(K)} &= (I - B)(I + B + \dots + B^K) \\ &= I - B + B - B^2 + \dots - B^K + B^K - B^{K+1} \\ &= I - B^{K+1}\end{aligned}$$

Comme $I - B$ est inversible :

$$S^{(K)} = (I - B)^{-1}(I - B^{K+1})$$

soit encore

$$S^{(K)} - (I - B)^{-1} = -(I - B)^{-1}B^{K+1}$$

En utilisant la propriété de sous-multiplicativité de la norme :

$$\begin{aligned}\|S^{(K)} - (I - B)^{-1}\| &= \|(I - B)^{-1}B^{K+1}\| \\ &\leq \|(I - B)^{-1}\| \|B^{K+1}\| \\ &\leq \|(I - B)^{-1}\| \underbrace{(\|B\|)^{K+1}}_{<1} \rightarrow 0 \text{ qd } K \rightarrow \infty\end{aligned}$$

d'où :

$$S := \lim_{K \rightarrow +\infty} S^{(K)} = (I - B)^{-1}$$

- (iii) $\|(I - B)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|B\|}$?

Avec l'inégalité triangulaire et la sous-multiplicativité, il vient :

$$\begin{aligned}\|S\| &\leq \underbrace{\|I\|}_{=1} + \|B\| + \|B^2\| + \|B^3\| + \dots \\ &\leq 1 + \|B\| + \|B\|^2 + \|B\|^3 + \dots = \frac{1}{1 - \|B\|} \quad \square\end{aligned}$$

On a un premier résultat de stabilité d'un système linéaire par rapport à une perturbation du second membre.

Théorème 1. Stabilité par rapport au second membre

Soit A une matrice inversible et soit x et $x + \delta x$ les solutions des systèmes

$$Ax = b, \quad A(x + \delta x) = b + \delta b.$$

On suppose $b \neq 0$. L'inégalité suivante est satisfaite :

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

De plus, c'est la meilleure possible (égalité dans certains cas).

Le résultat suivant porte sur la stabilité d'un système linéaire par rapport à une perturbation de la matrice cette fois.

Théorème 2. Stabilité par rapport à la matrice

Soit A une matrice inversible et δA une matrice de perturbation telle que $\|\delta A\| < 1/\|A^{-1}\|$. La matrice $A + \delta A$ est inversible et on note alors x et $x + \delta x$ les solutions des systèmes

$$Ax = b, \quad (A + \delta A)(x + \delta x) = b.$$

On suppose $b \neq 0$. L'inégalité suivante est satisfaite :

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x + \delta x\|} \leq \kappa(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$$

De plus, c'est la meilleure possible (égalité dans certains cas).

En TD, une estimation de l'erreur relative $\|\delta x\|/\|x\|$ sera obtenue en perturbant à la fois b et A et on montrera que (via le Th. d'inversion) :

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \right) (1 + \mathcal{O}(\|\delta A\|))$$

Un dernier résultat sur la méthode de Gauss en arithmétique flottante.

On utilise les notations suivantes :

- $|A|$ désigne la matrice de coefficients $|a_{ij}|$.
- Pour deux matrices A et B de même taille, l'inégalité $|A| \leq |B|$ signifie $|a_{ij}| \leq |b_{ij}|$, pour tout i, j .

Méthode de Gauss en arithmétique flottante

Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. On suppose que la méthode de Gauss/LU (avec ou sans échanges d'équations) conduite en arithmétique flottante sans overflow ni underflow, a permis d'obtenir des matrices $\hat{L}$ et $\hat{U}$ et une solution $\hat{x}$ du système linéaire $Ax = b$, alors on a :

$$(A + \delta A)\hat{x} = b \text{ avec } |\delta A| \leq 2\gamma_n |\hat{L}||\hat{U}| \text{ et } \gamma_n = \frac{n\mathbf{u}}{1 - n\mathbf{u}}$$

Commentaires.

- Ce résultat nous dit donc que la solution numérique obtenue (en arithmétique flottante) est la solution exacte du système perturbé $(A + \delta A)\hat{x} = b$ et nous permet a posteriori de calculer une majoration de la perturbation δA .
- On voit aussi qu'un pivot petit peut rendre la borne correspondante de δA très grande (du fait que $\hat{L}$ contient les coefficients d'élimination de Gauss, faisant intervenir les inverses des pivots) avec comme conséquence une perte du contrôle de l'amplitude de la matrice de perturbation δA .