

Feuille 3 : optimisation non-linéaire

Exercice 1. Minimum

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2(1 - y^3) + 3y^2$.

1. Déterminer les points critiques de f .
2. Montrer que le point $(0, 0)$ est un minimum local de f .

Exercice 2*. Point selle et matrice hessienne

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et soit $x^* \in \mathbb{R}^n$ un point critique de f , c'est-à-dire tel que $\nabla f(x^*) = 0$. On note $D^2 f(x^*)$ la matrice hessienne de f en x^* . On dit que x^* est un point-selle (en anglais saddle point) de f si x^* n'est ni un minimum local ni un maximum local de f , autrement dit pour tout voisinage ouvert V de x^* , il existe au moins deux points $x_1, x_2 \in V$ tels que

$$f(x_1) < f(x^*) < f(x_2)$$

Ainsi, partant du point x^* , on pourra toujours trouver des directions où la fonction f augmente et d'autres où elle diminue.

1. Rappeler la formule de Taylor à l'ordre 2 de f au voisinage de x^* .
2. Montrer que si la matrice hessienne $D^2 f(x^*)$ est *indéfinie* c'est-à-dire qu'il existe $u, v \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$u^T D^2 f(x^*) u > 0 \quad \text{et} \quad v^T D^2 f(x^*) v < 0,$$

alors x^* n'est ni un minimum local ni un maximum local et que c'est donc un *point selle* de f .

Indication. Montrer à l'aide de la formule de Taylor que $f(x^* + tu) > f(x^*)$ et $f(x^* + tv) < f(x^*)$ pour un réel $t \neq 0$ suffisamment petit.

3. Montrer que si la hessienne $D^2 f(x^*)$ possède au moins une valeur propre strictement positive et une strictement négative, alors x^* est un point selle.
4. *Application.* On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = x^2 - y^2 + xy.$$

- (a) Déterminer les points critiques de f .
- (b) Calculer la matrice hessienne en ces points.
- (c) Conclure sur leur nature.

Exercice 3. Gradient et courbe de niveau

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $x_0 \in \mathbb{R}$. On introduit la fonction $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(x, y) = f(x) - y$. On note C la courbe de niveau de F passant par (x_0, y_0) avec $y_0 = f(x_0)$, définie par $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } F(x, y) = 0\}$ et $T_{(x_0, y_0)}$ la droite tangente à la courbe de niveau C en (x_0, y_0) .

1. Donner l'équation de la droite tangente $T_{(x_0, y_0)}$.
2. Calculer le gradient de F .
3. Soit $v_0 = (x_0, y_0)$. Montrer que le gradient $\nabla F(v_0)$ est orthogonal à C en montrant que

$$\nabla F(v_0) \cdot (v_0 - v) = 0, \quad \forall v \in T_{(x_0, y_0)}.$$

Exercice 4*. Condition de convexité

Soit f une fonction dérivable sur un ensemble convexe V de $\mathbb{R}^n$. Montrer que f est convexe si et seulement si

$$\nabla f(x) \cdot (y - x) \leq f(y) - f(x), \quad \forall (x, y) \in V \times V.$$

Exercice 5. Aire maximale d'un rectangle à périmètre fixé

Dans cet exercice on cherche à déterminer les dimensions du rectangle qui possède l'aire maximale lorsque le périmètre est fixé et vaut P_0 .

1. En tenant compte de la contrainte sur le périmètre, exprimer l'aire d'un rectangle comme une fonction d'une seule variable x_1 . Déterminer le maximum de cette fonction et en déduire les dimensions du rectangle optimal.
2. En écrivant l'aire du rectangle comme une fonction de deux variables x_1 et x_2 , écrire la condition d'optimalité en tenant compte de la contrainte sur le périmètre à travers un multiplicateur de Lagrange. En déduire les dimensions du rectangle optimal.

Exercice 6*. Volume maximal d'un parallélépipède rectangle à surface fixée

Exercice similaire au précédent mais où le recours aux multiplicateurs de Lagrange est nécessaire (on ne peut pas se ramener à minimiser une fonction d'une seule variable).

On veut déterminer le parallélépipède rectangle de volume maximal ayant une surface fixée et qui vaut S_0 . Établir les conditions d'optimalité en tenant compte de la contrainte sur la surface avec un multiplicateur de Lagrange. En déduire les dimensions optimales du parallélépipède.

Exercice 7. Minimisation sous contrainte égalité

On considère le problème suivant :

$$\inf_{(x,y) \in V} f(x,y) = x^4 + y^4$$

avec

$$V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } g(x,y) := x^2 + y^2 - 1 = 0\}.$$

Écrire les conditions d'optimalité d'extrema liés et déterminer les solutions admissibles.

Exercice 8. Méthode de gradient à pas fixe pour une fonction quadratique

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{2}(Ax|x) - (b|x)$ où A est une matrice de taille (n,n) , symétrique et définie positive. On note x^* la solution du système linéaire $Ax = b$.

1. Justifier que x^* existe bien et qu'il est unique. Montrer que $(A(x - x^*)|x - x^*) = 2(f(x) - f(x^*))$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. En déduire que x^* est l'unique minimum de f sur $\mathbb{R}^n$.
2. On considère la méthode du gradient à pas fixe τ sur la fonction f . Montrer que l'itération $k \geq 0$ s'écrit

$$x_{k+1} - x^* = M_\tau(x_k - x^*)$$

où M_τ est une matrice à déterminer.

3. Donner une condition sur M_τ pour que la méthode converge i.e. $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|x_k - x^*\|_2 = 0$, pour tout vecteur de départ x_0 .
4. La matrice A étant symétrique et définie positive, les valeurs propres de A sont réelles et strictement positives. Déterminer les éléments propres de M_τ (valeurs et vecteurs propres) en fonction de ceux de A .
5. Dessiner la fonction $t \mapsto |1 - t\lambda|$ pour $\lambda > 0$ et $t \geq 0$. Déterminer les valeurs de t pour lesquelles cette fonction est < 1 . On a $\|A\|_2 = \max_{\lambda \in \text{sp}(A)} |\lambda| = \lambda_n$ la plus grande valeur propre (> 0) de A . En déduire que la condition de convergence obtenue précédemment est équivalente à

$$0 < \tau < \frac{2}{\lambda_n}.$$