



# Analyse numérique des équations de Navier-Stokes



## Table des matières

Chapitre 1. Introduction	5
1. Adimensionalisation	5
2. Réductions des équations	6
Chapitre 2. Equations de Stokes	9
1. Quelques rappels	9
2. Formulation mixte du problème de Stokes	9
3. Condition 'inf-sup' continue	11
3.1. Un résultat abstrait pour les problèmes mixtes	11
3.2. Condition 'inf-sup' pour le problème de Stokes	13
4. Approximation par Eléments Finis et condition 'inf-sup' discrète	15
4.1. Quelques rappels et compléments sur les Eléments Finis	16
4.2. Formulation mixte approchée	20
4.3. Eléments Finis pour le problème de Stokes	22
4.4. Forme algébrique	29
5. Etude de la convergence des approximations.	31
5.1. Résultats généraux	31
5.2. Estimations d'erreurs	35
Chapitre 3. Equations de Navier-Stokes	39
1. Introduction	39
1.1. Quelques propriétés de la forme $c$	40
1.2. Quelques rappels utiles	41
1.3. Une estimation d'énergie	41
2. Discrétisation complète de la formulation mixte de Navier-Stokes	42
2.1. Schéma semi-implicite (I)	42
2.2. Schéma semi-implicite (II)	45
3. Méthodes de décomposition d'opérateurs	52
3.1. Introduction	52
3.2. Méthode de projection	53
3.3. Méthode de Glowinski	55
4. Méthode des caractéristiques	55
4.1. Semi-discrétisation en temps	57
4.2. Stabilité	57
4.3. Estimation d'erreurs	58
Annexe : Eléments Finis pour les équations de Stokes (2D/3D)	63
A1. Introduction.	65
A2. Cas d'une triangulation de $\Omega$ .	67
A2.1. Eléments Finis $\mathbb{P}_1$ .	67

A2.2. Éléments Finis $\mathbb{P}_2$ .	72
A3. Cas d'une quadrangulation de $\Omega$ .	72
A3.1. Éléments Finis $\mathbb{Q}_1$ .	73
A3.2. Éléments Finis $\mathbb{Q}_2$ .	75
A4. Système linéaire (3D).	76
A5. Matrices élémentaires.	77
A5.1. Matrices de rigidité.	77
A5.2. Matrice de masse.	80
A5.3. Matrice de la divergence.	81
A6. Traitement de la pression	82
Bibliographie	83

## Introduction

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \leq 3)$  un domaine représentant une région de l'espace. Le domaine  $\Omega$  sera toujours supposé borné et régulier. La dynamique d'un fluide *visqueux incompressible* peut être décrite par les équations de Navier-Stokes où les inconnues sont la vitesse  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  et la pression  $p = p(\mathbf{x}, t)$  du fluide au point  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N) \in \Omega$  et à l'instant  $t$ . La vitesse est une fonction vectorielle  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_N) \in \mathbb{R}^N$  avec  $u_i = u_i(x_1, \dots, x_N, t)$  et la pression  $p$  est une fonction scalaire. Les équations de Navier-Stokes sont :

$$(1.0.1) \quad \rho (\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+,$$

$$(1.0.2) \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+.$$

La densité  $\rho > 0$  du fluide est choisie constante et  $\nu > 0$  désigne la viscosité dynamique du fluide. Enfin,  $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_N)$  représente une densité massique de forces extérieures (la gravité par exemple). Les différents opérateurs différentiels intervenant dans les équations de Navier-Stokes sont définis de la façon suivante :

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_N} \right), \quad (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \sum_{i=1}^N u_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \in \mathbb{R}^N,$$

$$\Delta \mathbf{u} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_i^2} \in \mathbb{R}^N, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \in \mathbb{R}.$$

Aux équations de Navier-Stokes (1.0.1), (1.0.2), on ajoute une condition limite de type Dirichlet sur le bord  $\partial\Omega$ , c'est-à-dire

$$(1.0.3) \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \quad \text{pour } \mathbf{x} \in \partial\Omega, t > 0.$$

Dans la plupart des cas, on choisira la condition de non-glissement  $\mathbf{u} = 0$  sur  $\partial\Omega$ . Enfin, on ajoute une condition initiale sur la vitesse :

$$(1.0.4) \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \quad \text{pour } \mathbf{x} \in \partial\Omega,$$

où  $\mathbf{u}_0$  est une fonction donnée.

### 1. Adimensionalisation

Soit  $U \in \mathbb{R}$  une vitesse caractéristique de l'écoulement étudié (par exemple liée à une condition limite non-homogène) et  $L$  une longueur caractéristique (par exemple le diamètre de  $\Omega$ ). On considère le temps caractéristique  $T = L/U$  et on pose

$$(1.1.1) \quad \tilde{x} = \frac{x}{L}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{T}, \quad \tilde{\mathbf{u}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}) = \frac{\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{U}, \quad \tilde{p}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}) = \frac{p(\mathbf{x}, t)}{\rho U^2}.$$

Les nouvelles vitesse et pression  $\tilde{\mathbf{u}}$  et  $\tilde{p}$  vérifient alors

$$\rho \left( \frac{U}{L} \tilde{\mathbf{u}}_t + \frac{U^2}{L} (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}} \right) - \nu \frac{U}{L^2} \Delta \tilde{\mathbf{u}} + \frac{\rho U^2}{L} \nabla \tilde{p} = \mathbf{f} \quad \text{dans } \tilde{\Omega} \times \mathbb{R}^+.$$

Les (nouveaux) opérateurs différentiels  $\nabla$  et  $\Delta$  ci-dessus sont relatifs à la (nouvelle) variable  $\tilde{\mathbf{x}}$ . On obtient ainsi

$$(1.1.2) \quad \tilde{\mathbf{u}}_t + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}} - \frac{1}{Re} \Delta \tilde{\mathbf{u}} + \nabla \tilde{p} = \tilde{\mathbf{f}} \quad \text{dans } \tilde{\Omega} \times \mathbb{R}^+,$$

$$(1.1.3) \quad \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}} = 0 \quad \text{dans } \tilde{\Omega} \times \mathbb{R}^+,$$

avec  $\tilde{\mathbf{f}} = \frac{L}{\rho U^2} \mathbf{f}$  et  $Re$  est le nombre de Reynolds défini par

$$(1.1.4) \quad Re = \frac{LU}{\nu} \rho.$$

Le nombre  $\tilde{\nu} = \nu/\rho$  représente la viscosité cinématique. Par exemple, on a  $\tilde{\nu} = 0.15 \cdot 10^{-4}$  m/s pour l'air et  $\tilde{\nu} = 10^{-6}$  m/s pour l'eau. Le tableau suivant indique quelques valeurs du nombre de Reynolds.

	$U$	$L$	$Re = LU/\tilde{\nu}$
bactérie (dans l'eau)	100 $\mu\text{m/s}$	0.1 $\mu\text{m}$	$10^{-5}$
protozoaire	$10^{-1}$ cm/s	$10^{-2}$ cm	$10^{-1}$
guêpe	2 cm/s	2 cm	26
papillon	1 m/s	5 cm	3333
pigeon	5 m/s	30 cm	$10^5$
poisson (hareng)	1.67 m/s	30 cm	$5 \cdot 10^5$
poisson (saumon)	12.5 m/s	1 m	$1.25 \cdot 10^7$
automobile	100 km/h	3 m	$5 \cdot 10^6$
avion (airbus A330)	860 km/h	60 m	$\simeq 10^9$

Le nombre de Reynolds caractérise le type d'écoulement étudié. Mathématiquement, il prend en compte le terme de viscosité du laplacien de la vitesse.

## 2. Réductions des équations

Les équations de Navier-Stokes se réduisent aux équations de Stokes ou d'Euler selon que le nombre de Reynolds  $Re$  est petit ou grand.

Pour  $Re \ll 1$ , les effets dus à la viscosité sont dominants. Si on pose  $p' = LU\rho\tilde{p} = \nu Re\tilde{p}$  et  $\mathbf{f}' = \nu Re\tilde{\mathbf{f}}$ , l'équation (1.1.2) devient

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} + \frac{1}{\nu Re} \nabla p' = \frac{1}{\nu Re} \mathbf{f}'.$$

En faisant tendre  $Re$  vers 0, on obtient alors les équations de Stokes stationnaires (on oublie les *primes*) :

$$(1.2.1) \quad -\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega,$$

$$(1.2.2) \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega.$$

Pour  $Re \gg 1$ , le terme de convection nonlinéaire  $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$  est dominant ; dans ce cas, en faisant tendre  $Re$  vers  $+\infty$  dans l'équation (1.1.2) (ou bien en prenant directement  $\nu = 0$  dans (1.0.1)), on obtient les équations d'Euler (sans les *tildes*) :

$$(1.2.3) \quad \mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+,$$

$$(1.2.4) \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+.$$

Les principales difficultés pour étudier et résoudre les équations de Navier-Stokes (1.0.1), (1.0.2) sont d'une part le couplage vitesse/pression et d'autre part la présence du terme de convection nonlinéaire  $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ .

D'un point de vue numérique, la résolution des équations de Navier-Stokes utilisera dans de nombreuses méthodes la résolution intermédiaire de problèmes de Stokes. Le problème de Stokes est un problème couplé vitesse/pression mais linéaire. On va d'abord étudier le problème de Stokes puis on développera et on analysera des schémas numériques pour les équations de Navier-Stokes.





## Equations de Stokes

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  ( $N = 2$  ou  $3$ ) un domaine borné et régulier. On considère le problème de Stokes sous la forme suivante, avec  $\nu > 0$  :

$$(2.0.5) \quad -\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega$$

$$(2.0.6) \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega.$$

$$(2.0.7) \quad \mathbf{u} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

### 1. Quelques rappels

Commençons par quelques rappels utiles par la suite.

**Formules de Green :** a) Pour tous champs scalaires  $v, w$  réguliers, on a

$$(2.1.1) \quad - \int_{\Omega} \Delta w v \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} v \, d\sigma,$$

où  $\mathbf{n}$  est la normale unitaire extérieure à  $\Omega$ .

b) Pour tous champs vectoriels  $\mathbf{v}, \mathbf{w}$  réguliers, on a

$$(2.1.2) \quad - \int_{\Omega} \Delta \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{w} : \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} \, d\sigma,$$

$$\text{avec } \nabla \mathbf{w} : \nabla \mathbf{v} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}.$$

**Formule de la divergence :** Pour tout champ vectoriel  $\mathbf{v}$  régulier, on a

$$(2.1.3) \quad \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma,$$

où  $\mathbf{n}$  est la normale unitaire extérieure à  $\Omega$ .

### 2. Formulation mixte du problème de Stokes

On va établir une formulation variationnelle mixte du problème de Stokes (2.0.5), (2.0.6). Pour ça, on multiplie l'équation (2.0.5) par une fonction test  $\mathbf{v}$  qui s'annule sur le bord  $\partial\Omega$  et on intègre sur  $\Omega$  :

$$-\nu \int_{\Omega} \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}.$$

En utilisant la formule de Green (2.1.2), en intégrant par parties le terme de pression et enfin en tenant compte du fait que la fonction test  $\mathbf{v}$  s'annule sur le bord du domaine, on obtient

$$\nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}.$$

On introduit alors les formes bilinéaires suivantes :

$$(2.2.1) \quad \begin{aligned} a &: H_0^1(\Omega)^N \times H_0^1(\Omega)^N \rightarrow \mathbb{R} \\ a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

$$(2.2.2) \quad \begin{aligned} b &: H_0^1(\Omega)^N \times L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \\ b(\mathbf{u}, q) &= - \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{u}) q \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

On a besoin également d'introduire l'espace

$$(2.2.3) \quad L_0^2(\Omega) = \{q \in L^2(\Omega), \int_{\Omega} q \, d\mathbf{x} = 0\},$$

l'espace des fonctions de  $L^2(\Omega)$  à moyenne nulle. La formulation variationnelle mixte du problème de Stokes s'écrit alors

Trouver  $(\mathbf{u}, p) \in H_0^1(\Omega)^N \times L_0^2(\Omega)$  tels que

$$(2.2.4) \quad \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^N$$

$$(2.2.5) \quad \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{u}) q \, d\mathbf{x} = 0 \quad \forall q \in L_0^2(\Omega).$$

*Remarque.* Dans la relation (2.2.5), il est équivalent de prendre des fonctions test dans  $L^2(\Omega)$  (c'est-à-dire non nécessairement à moyenne nulle). En effet, supposons que (2.2.5) soit satisfaite. Pour  $r \in L^2(\Omega)$ , on note  $\bar{r}$  sa valeur moyenne i.e.  $\bar{r} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} r \, d\mathbf{x}$  et on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{u}) r \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{u})(r - \bar{r}) \, d\mathbf{x} + \bar{r} \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{u}) \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{u})(r - \bar{r}) \, d\mathbf{x} + \bar{r} \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Or,  $r - \bar{r} \in L_0^2(\Omega)$  et par conséquent pour  $u \in H_0^1(\Omega)^N$  satisfaisant (2.2.5), on obtient

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{u}) r \, d\mathbf{x} = 0.$$

□

Avec les notations précédentes, la formulation mixte du problème de Stokes s'écrit :

Trouver  $(\mathbf{u}, p) \in H_0^1(\Omega)^N \times L_0^2(\Omega)$  tels que

$$(2.2.6) \quad a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^N$$

$$(2.2.7) \quad b(\mathbf{u}, q) = 0 \quad \forall q \in L_0^2(\Omega).$$

*Remarques.*

- (1) Il est important de chercher la pression  $p$  à moyenne nulle. En effet, si  $p$  vérifie l'équation (2.0.5) de Stokes alors il en est de même pour  $p + C$  où  $C$  est une constante quelconque. Comme on le verra, l'espace  $L_0^2(\Omega)$  des fonctions à moyenne nulle assure l'unicité de la pression.
- (2) Le terme "mixte" faite référence à la formulation vitesse/pression. Un autre cadre fonctionnel est possible. Soit  $V = \{\mathbf{u} \in [H_0^1(\Omega)]^N \mid \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ dans } \Omega\}$ . La façon dont (2.2.6),(2.2.7) détermine la vitesse  $\mathbf{u}$  est équivalente au problème suivant :

$$(2.2.8) \quad \text{Trouver } \mathbf{u} \in V \text{ tel que } a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

D'après le Lemme de Lax-Milgram, le problème (2.2.8) admet une unique solution  $\mathbf{u} \in V$  (la forme  $a$  est continue et coercive sur  $V$ ). C'est d'ailleurs de cette façon qu'on peut établir l'existence et l'unicité d'une solution du problème mixte (2.2.6),(2.2.7).

### 3. Condition 'inf-sup' continue

**3.1. Un résultat abstrait pour les problèmes mixtes.** Soit  $X$  et  $Y$  deux espaces de Hilbert et deux formes bilinéaires

$$\begin{aligned} a &: X \times X \rightarrow \mathbb{R} \\ b &: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}. \end{aligned}$$

On note  $\|\cdot\|_X$  (resp.  $\|\cdot\|_Y$ ) la norme sur  $X$  (resp. sur  $Y$ ). Les formes  $a$  et  $b$  sont supposées *continues*. Étant donné  $f \in X'$ , on cherche  $(u, p) \in X \times Y$  tels que

$$(2.3.1) \quad a(u, v) + b(v, p) = \langle f, v \rangle_{X', X} \quad \forall v \in X$$

$$(2.3.2) \quad b(u, q) = 0 \quad \forall q \in Y.$$

**THÉORÈME 2.1.** *On fait les hypothèses suivantes :*

- (1) *La forme  $a$  est coercive sur  $X$  :*

$$\text{Il existe } \alpha > 0 \text{ tel que } a(v, v) \geq \alpha \|v\|_X^2 \quad \forall v \in X.$$

- (2) *La forme  $b$  satisfait la condition 'inf-sup' :*

$$\text{Il existe } \beta > 0 \text{ tel que } \sup_{\substack{v \in X \\ v \neq 0}} \frac{b(v, q)}{\|v\|_X} \geq \beta \|q\|_Y \quad \forall q \in Y.$$

Alors le problème (2.3.1),(2.3.2) admet une unique solution  $(u, p) \in X \times Y$ .

*Remarque.* La condition (2) du théorème précédent implique

$$\inf_{\substack{q \in Y \\ q \neq 0}} \sup_{\substack{v \in X \\ v \neq 0}} \frac{b(v, q)}{\|v\|_X \|q\|_Y} \geq \beta.$$

*Démonstration du théorème.* Soit  $V = \{v \in X \mid b(v, q) = 0 \forall q \in Y\}$ .  $V$  est un sous-espace fermé de  $X$ . La façon dont le problème (2.3.1),(2.3.2) détermine la vitesse  $u \in X$  est équivalente au problème

$$(2.3.3) \quad \text{Trouver } u \in V \text{ tel que } a(u, v) = \langle f, v \rangle_{X', X} \quad \forall v \in V.$$

La coercivité de  $a$  implique que (2.3.3) admet une unique solution  $u \in V$  (Lax-Milgram). On cherche alors  $p \in Y$  tel que

$$(2.3.4) \quad b(v, p) = -a(u, v) + \langle f, v \rangle_{X', X} \quad \forall v \in X.$$

On pose  $F(v) = -a(u, v) + \langle f, v \rangle_{X', X}$  et on remarque que  $F(v) = 0, \forall v \in V$ . On peut donc se restreindre à des fonctions  $v \in V^\perp = \{v \in X \mid (w, v)_X = 0, \forall w \in V\}$ . Plus précisément, le problème (2.3.4) est équivalent à chercher  $p \in Y$  tel que

$$(2.3.5) \quad b(v, p) = F(v) \quad \forall v \in V^\perp.$$

En effet, supposons que (2.3.5) soit vraie. Montrons que (2.3.4) est alors vérifiée.  $V$  étant fermé dans  $X$ , on a  $X = V \oplus V^\perp$ . Soit  $v \in X$  avec  $v = v_1 + v_2$  et  $v_1 \in V, v_2 \in V^\perp$ . On a  $b(v, p) = b(v_1, p) + b(v_2, p) = 0 + F(v_2) = F(v_1) + F(v_2) = F(v)$  car  $F(v_1) = 0$  puisque  $v_1 \in V$ .

Pour  $p \in Y$  donné, la forme linéaire  $v \mapsto b(v, p)$  est continue sur  $V^\perp$ . L'espace  $V^\perp$  est un espace de Hilbert muni du produit scalaire sur  $X$ . Par le Théorème de Riesz, il existe alors un unique  $Tp \in V^\perp$  tel que

$$(2.3.6) \quad b(v, p) = (Tp, v)_X \quad \forall v \in V^\perp,$$

$$(2.3.7) \quad \|Tp\|_X = \|b(\cdot, p)\|_{(V^\perp)'} = \sup_{v \in V^\perp} \frac{b(v, p)}{\|v\|_X}$$

Ceci définit un opérateur  $T$  linéaire et continue sur  $Y$  car d'après (2.3.7) et la continuité de  $b$ , on a  $\|Tp\|_X \leq C\|p\|_Y$ . On va montrer que

$$Im(T) \stackrel{\text{def}}{=} \{Tp \mid p \in Y\} = V^\perp.$$

On pourra alors conclure de la façon suivante : on a  $F \in (V^\perp)'$  donc d'après le théorème de Riesz, il existe  $w \in V^\perp$  tel que  $F(v) = (w, v)_X, \forall v \in V^\perp$ . Puisque  $Im(T) = V^\perp$ , pour  $w \in V^\perp$  il existe  $p \in Y$  tel que  $Tp = w$  et on a

$$b(v, p) = (Tp, v) = (w, v) = F(v) \quad \forall v \in V^\perp.$$

Il reste donc à montrer que  $Im(T) = V^\perp$ . Montrons tout d'abord que  $Im(T)$  est fermé dans  $V^\perp$ . Soit une suite  $(p_j) \in Y$  telle que  $Tp_j \rightarrow w$  dans  $V^\perp$ . La suite  $Tp_j$  est une suite de Cauchy dans  $V^\perp$ . Par la condition 'inf-sup', on a

$$\begin{aligned} \beta \|p_j - p_k\|_Y &\leq \sup_{v \in X} \frac{b(v, p_j - p_k)}{\|v\|_X} \\ &= \sup_{v \in V^\perp} \frac{b(v, p_j - p_k)}{\|v\|_X} = \|T(p_j - p_k)\|_X. \end{aligned}$$

Par conséquent,  $(p_j)$  est une suite de Cauchy dans  $Y$  et  $p_j \rightarrow p$  dans  $Y$ . Par continuité de  $T$ , on a  $Tp = w$  et donc  $Im(T)$  est fermé dans  $V^\perp$ . Ainsi on a

$$V^\perp = Im(T) \oplus (Im(T))^\perp.$$

En particulier,  $Im(T) \cap (Im(T))^\perp = \{0\}$ . On suppose que  $Im(T) \neq V^\perp$  donc  $(Im(T))^\perp \neq \{0\}$ . Soit alors  $v \in (Im(T))^\perp, v \neq 0$ . Pour tout  $q \in Y$ , on a  $b(v, q) = (Tq, v) = 0$  donc  $v \in V$ , ce qui contredit le fait que  $v \in (Im(T))^\perp$  et  $v \neq 0$  donc nécessairement

$$Im(T) = V^\perp.$$

Le théorème est ainsi démontré.  $\square$

**3.2. Condition 'inf-sup' pour le problème de Stokes.** On souhaite à présent vérifier les hypothèses du Théorème 2.1 pour le problème de Stokes avec  $X = [H_0^1(\Omega)]^N$ ,  $Y = L_0^2(\Omega)$  et les formes  $a$  et  $b$  définies par (2.2.1) et (2.2.2).

★ La forme  $a$  est continue et coercive sur  $[H_0^1(\Omega)]^N \times [H_0^1(\Omega)]^N$ . En effet, pour tout  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  dans  $[H_0^1(\Omega)]^N$ , on a

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \nu \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \nabla u_i \cdot \nabla v_i \, d\mathbf{x}.$$

Par inégalité d'Hölder, il vient

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &\leq \nu \sum_{i=1}^N \|\nabla u_i\|_{L(\Omega)} \|\nabla v_i\|_{L(\Omega)} \\ &\leq \nu \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)^N} \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)^N} \\ &\leq \nu \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)^N} \|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)^N} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^N, \end{aligned}$$

ce qui établit la continuité de  $a$ . Par ailleurs, l'inégalité de Poincaré

$$\|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)^N} \leq C \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)^N} \quad \forall \mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^N,$$

entraîne la coercivité de  $a$  car

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \nu \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)^N}^2 \geq \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)^N}^2 \quad \forall \mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^N.$$

★ La forme  $b$  est continue sur  $[H_0^1(\Omega)]^N \times L^2(\Omega)$  :

$$b(\mathbf{v}, q) = - \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{v}) q \, d\mathbf{x} \leq \|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)^N} \|q\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^N, \forall q \in L^2(\Omega).$$

★ Condition 'inf-sup' pour  $b$ . Pour établir que la forme  $b$  du problème de Stokes vérifie la condition 'inf-sup', on a besoin du résultat préliminaire suivant :

LEMME 2.1. *Il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $p \in L^2(\Omega)$ , il existe  $\mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^N$  tel que*

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = p \quad \text{et} \quad \|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)^N} \leq C \|p\|_{L^2(\Omega)}.$$

*De plus, si  $p$  vérifie  $\int_{\Omega} p \, d\mathbf{x} = 0$  alors on peut prendre  $\mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^N$ .*

*Démonstration du Lemme 2.1.* On montre le lemme pour le cas  $N = 2$ . Le domaine  $\Omega$  étant supposé régulier, il existe une unique fonction  $w \in H^2(\Omega)$  telle que

$$\begin{aligned} -\Delta w &= p \quad \text{dans } \Omega \\ w &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$

De plus, il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $p$  telle que

$$\|w\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|p\|_{L^2(\Omega)}.$$

On choisit alors  $\mathbf{v} = -\operatorname{grad} w$  et la première partie du Lemme est établie.

On suppose maintenant que  $\int_{\Omega} p \, d\mathbf{x} = 0$ . Il existe alors un unique  $w \in H^2(\Omega)$  avec  $\int_{\Omega} w \, d\mathbf{x} = 0$  tel que

$$\begin{aligned} -\Delta w &= p \quad \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

et de plus on a

$$\|w\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|p\|_{L^2(\Omega)}.$$

On pose  $\mathbf{v}_1 = -\text{grad } w$  de sorte que

$$\text{div } \mathbf{v}_1 = p \quad \text{et} \quad \|\mathbf{v}_1\|_{[H^1(\Omega)]^2} \leq C\|p\|_{L^2(\Omega)}.$$

De plus, on a

$$\mathbf{v}_1|_{\partial\Omega} \cdot \mathbf{n} = -(\text{grad } w)|_{\partial\Omega} \cdot \mathbf{n} = -\frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

On rappelle le résultat de trace suivant : L'opérateur  $\gamma : \mathbf{u} \mapsto \left( \mathbf{u}|_{\partial\Omega}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \right)$  est linéaire, continue et surjectif de  $H^2(\Omega)^N$  sur  $[H^{3/2}(\partial\Omega)]^2 \times [H^{1/2}(\partial\Omega)]^2$ . Par conséquent, il existe  $\mathbf{u} \in [H^2(\Omega)]^2$  tel que

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} &= \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{t} \quad \text{sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

où  $\mathbf{t}$  est le vecteur unitaire tangent à  $\partial\Omega$ . De plus, on a

$$(2.3.8) \quad \|\mathbf{u}\|_{[H^2(\Omega)]^2} \leq C \left( \left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \right\|_{[H^{1/2}(\partial\Omega)]^2} + \|\mathbf{u}\|_{[H^{3/2}(\partial\Omega)]^2} \right)$$

$$(2.3.9) \quad \leq C_{\mathbf{t}} \|\mathbf{v}_1\|_{[H^1(\Omega)]^2}.$$

L'inégalité (2.3.8) vient de ce que l'application trace  $\gamma$  est ouverte :  $\gamma : E \rightarrow F$  linéaire continue et surjective  $\Rightarrow \exists c > 0$  tel que  $B_F(0, c) \subset \gamma(B_E(0, 1))$ . L'inégalité (2.3.9) vient de la continuité de l'application trace  $\gamma$ . On pose alors

$$(2.3.10) \quad \mathbf{v}_2 = \text{rot } \mathbf{u} = \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_2}, -\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \right).$$

On obtient

$$(2.3.11) \quad \text{div } \mathbf{v}_2 = \text{div rot } \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

et  $\mathbf{v}_2|_{\partial\Omega} \cdot \mathbf{n} = \text{rot } \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \text{grad } \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} = 0$  sur  $\partial\Omega$  car  $\mathbf{u} = 0$  sur  $\partial\Omega$ . De plus, on a

$$\mathbf{v}_2|_{\partial\Omega} \cdot \mathbf{t} = \text{rot } \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} = -\text{grad } \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = -\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} = -\mathbf{v}_1|_{\partial\Omega} \cdot \mathbf{t} \quad \text{sur } \partial\Omega. \quad \text{Ainsi, on obtient}$$

$$(2.3.12) \quad \mathbf{v}_2 = -\mathbf{v}_1 \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

On pose enfin  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$  et on obtient

$$(2.3.13) \quad \text{div } \mathbf{v} = p \quad \text{dans } \Omega$$

$$(2.3.14) \quad \mathbf{v} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$

On a de plus,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|_{[H^1(\Omega)]^2} &\leq \|\mathbf{v}_1\|_{[H^1(\Omega)]^2} + \|\mathbf{v}_2\|_{[H^1(\Omega)]^2} \\ &\leq C (\|\mathbf{v}_1\|_{[H^1(\Omega)]^2} + \|\mathbf{u}\|_{[H^2(\Omega)]^2}) \\ &\leq C \|\mathbf{v}_1\|_{[H^1(\Omega)]^2} \\ &\leq C \|p\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

□

Pour établir les conditions 'inf-sup' pour le problème de Stokes, on procède de la façon suivante. Soit  $q \in L^2_0(\Omega)$ . D'après le Lemme 2.1, il existe  $\mathbf{w} \in [H^1_0(\Omega)]^N$  tel que  $q = -\operatorname{div} \mathbf{w}$  et  $\|\mathbf{w}\|_{H^1(\Omega)^N} \leq C \|q\|_{L^2(\Omega)}$ . On a alors  $b(\mathbf{w}, q) = -\int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{w}) q \, d\mathbf{x} = \|q\|_{L^2(\Omega)}^2$  et par conséquent

$$\frac{b(\mathbf{w}, q)}{\|\mathbf{w}\|_{H^1(\Omega)^N}} \geq \frac{1}{C} \frac{b(\mathbf{w}, q)}{\|q\|_{L^2(\Omega)}} = \frac{1}{C} \|q\|_{L^2(\Omega)}.$$

Par conséquent,  $b$  vérifie la condition 'inf-sup' avec  $\beta = 1/C > 0$  où  $C$  est la constante du Lemme 2.1.

**Conclusion.** Le problème de Stokes (2.2.6), (2.2.7) admet une unique solution  $(u, p) \in H^1_0(\Omega)^N \times L^2_0(\Omega)$ .

*Remarque.* Si  $\mathbf{u}$  est solution du problème de Stokes (2.2.6), (2.2.7), alors elle vérifie  $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v})$  pour tout  $\mathbf{v} \in V$ , ce qui est équivalent au problème

$$\min_{\mathbf{v} \in V} \frac{1}{2} a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - (\mathbf{f}, \mathbf{v}).$$

En fait, le problème de Stokes en formulation mixte correspond au problème de point selle :

$$\min_{\mathbf{v} \in X} \max_{q \in Y} \frac{1}{2} a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, q) - (\mathbf{f}, \mathbf{v}).$$

Ainsi, la pression peut être vue comme un multiplicateur de Lagrange de la contrainte de divergence nulle.

#### 4. Approximation par Éléments Finis et condition 'inf-sup' discrète

On se place désormais en dimension  $N = 2$  (sauf mention contraire explicite) et on utilisera des Éléments Finis triangulaires de Lagrange.

On suppose que  $\Omega$  est un domaine polygonal de sorte que  $\bar{\Omega}$  peut être exactement triangulé par :

$$\bar{\Omega} = \cup_i K_i,$$

où  $K_i$  est un triangle<sup>1</sup> (fermé) tel que  $K_i \cap K_j = \emptyset$  ou 1 sommet ou 1 côté entier<sup>2</sup>, pour  $i \neq j$ .

On note  $\{a_i\}$  les sommets des triangles. La taille du maillage est caractérisée par

$$h = \max_K h_K,$$

- 
1. un tétraèdre en dimension  $N = 3$
  2. une face ou une arête en dimension  $N = 3$

où  $h_K$  est la taille du triangle  $K$  définie par

$$h_K = \max_{a_i, a_j \in K} |a_i - a_j|.$$

De façon équivalente,  $h_K$  peut être définie comme le diamètre du triangle  $K$  i.e. le diamètre du cercle circonscrit au triangle  $K$ . On note alors  $\mathcal{T}_h$  la triangulation formée des triangles  $\{K_i\}_i$ .

On supposera également que le domaine  $\Omega$  est convexe, et ceci essentiellement pour avoir la régularité de la solution de problème elliptique dans  $\Omega$ .

Enfin,  $\mathbb{P}_k, k \geq 0$ , désignera l'espace des polynômes à  $N$  variables de degré total inférieur ou égal à  $k$ .

**4.1. Quelques rappels et compléments sur les Eléments Finis.** On donne quelques rappels élémentaires sur les Eléments Finis.

★ *Triangulations régulières.* La triangulation  $\mathcal{T}_h$  de  $\bar{\Omega}$  est dite régulière s'il existe  $\sigma > 0$  indépendant de  $h$  et de  $K$  tel que

$$\sigma_K := \frac{h_K}{\rho_K} \leq \sigma \quad \forall K \in \mathcal{T}_h,$$

où  $\rho_K$  est la rondeur du triangle  $K$  définie par

$$\rho_K = \sup\{\text{diamètre de } B; B \text{ boule contenue dans } K\}.$$

Le rapport  $\sigma_K$  mesure l'appauvrissement du triangle  $K$  ( $\sigma_K = \sqrt{3}$  pour  $K$  équilatéral). Plus précisément, si  $h_K$  désigne la longueur du plus grand côté du triangle  $K$  et si  $\theta_K$  est le plus petit angle de  $K$ , alors on peut montrer que

$$\frac{1 + \sin \frac{\theta_K}{2}}{\sin \theta_K} \leq \frac{h_K}{\rho_K} \leq \frac{1}{\tan \frac{\theta_K}{2}}.$$

La triangulation  $\mathcal{T}_h$  est dite uniformément régulière (ou quasi-uniforme) s'il existe  $\sigma > 0$  et  $\sigma' > 0$  indépendants de  $h$  et de  $K$  tels que

$$\sigma' h \leq h_K \leq \sigma \rho_K \quad \forall K \in \mathcal{T}_h.$$

★ *Coordonnées barycentriques.* Les coordonnées barycentriques d'un point  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  par rapport aux 3 sommets  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  d'un triangle  $K$  sont les fonctions  $\lambda_i = \lambda_i(\mathbf{x})$  telles que

$$\lambda_i \in \mathbb{P}_1, \quad \lambda_i(\mathbf{a}_j) = \delta_{ij} \quad \text{pour } 1 \leq i, j \leq 3,$$

où  $\delta_{ij}$  désigne le symbole de Kronecker. Les coordonnées barycentriques ont les propriétés suivantes :

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_i = 1,$$

$$p = \sum_{i=1}^3 p(\mathbf{a}_i) \lambda_i \quad \forall p \in \mathbb{P}_1.$$

*Formule d'intégration.* Pour tout  $k_1, k_2, k_3 \geq 0$ ,

$$(2.4.1) \quad \int_K \lambda_1^{k_1} \lambda_2^{k_2} \lambda_3^{k_3} d\mathbf{x} = 2|K| \frac{k_1! k_2! k_3!}{(2 + k_1 + k_2 + k_3)!}.$$

★ *Elément de référence.* Soit la transformation affine  $F_K$  qui transforme le triangle de référence  $\hat{K}$  en le triangle  $K$  i.e.  $F_K(\hat{K}) = K$  (cf. Figure 1).



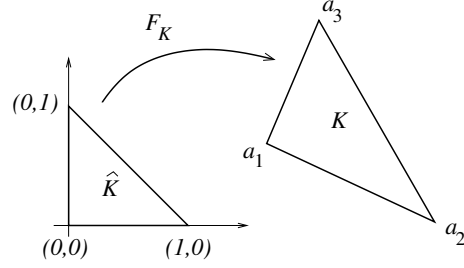


FIGURE 1. Triangle de référence - Transformation affine.

La transformation  $F_K$  est définie par  $F_K(\hat{\mathbf{x}}) = B_K \hat{\mathbf{x}} + b_K$  avec

$$B_K = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix}, \quad b_K = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix},$$

où les  $(x_i, y_i)$  sont les coordonnées des sommets  $\mathbf{a}_i$ . On rappelle les propriétés suivantes :

$$2|K| = |\det B_K|,$$

$$\|B_K\|_2 \leq \frac{h_K}{\rho_{\hat{K}}}, \quad \|B_K^{-1}\|_2 \leq \frac{h_{\hat{K}}}{\rho_K}.$$

Par changement de variables dans les intégrales et en utilisant les propriétés ci-dessus, on peut montrer le résultat suivant.

**PROPOSITION 2.1.** *Pour  $m \geq 0$  entier, l'application  $v \mapsto \hat{v} = v \circ F_K$  est un isomorphisme de  $H^m(K)$  sur  $H^m(\hat{K})$  et il existe  $C_1, C_2 > 0$  ne dépendants que de  $m$ , telles que*

$$|v|_{m,K} \leq C_1 \frac{h_K}{\rho_K^m} |\hat{v}|_{m,\hat{K}} \quad \forall \hat{v} \in H^m(\hat{K})$$

$$|\hat{v}|_{m,\hat{K}} \leq C_2 \frac{h_{\hat{K}}^m}{\rho_K} |v|_{m,K} \quad \forall v \in H^m(K),$$

où  $|\cdot|_{m,K}$  désigne la semi-norme dans  $H^m(K)$  i.e.  $|v|_{m,K} = \left( \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha v\|_{L^2(K)}^2 \right)^{1/2}$ .

★ *Inégalités inverses.*

**PROPOSITION 2.2.** *On suppose que  $\mathcal{T}_h$  est uniformément régulière. Soit  $K \in \mathcal{T}_h$  et  $\mathcal{P}$  un sous-espace de dimension finie de  $H^1(K) \cap H^m(K)$  avec  $0 \leq m \leq l$ . Il existe  $C > 0$  indépendante de  $h$  et  $K$  telle que*

$$\|v\|_{H^1(K)} \leq Ch^{m-l} \|v\|_{H^m(K)} \quad v \in \mathcal{P}.$$

*Démonstration pour le cas  $m = 0$ .* Par l'équivalence des normes dans  $\mathcal{P}$ , on a

$$\|\hat{v}\|_{H^1(\hat{K})} \leq C \|\hat{v}\|_{L^2(\hat{K})} \quad \forall v \in \mathcal{P}, \quad \hat{v} = v \circ F_K,$$

où  $C > 0$  ne dépend que de  $\hat{K}$  et  $l$ . D'après la Proposition 2.1, on obtient

$$C' \frac{\rho_K^l}{h_K} |v|_{l,K} \leq |\hat{v}|_{l,\hat{K}} \leq \|\hat{v}\|_{H^1(\hat{K})} \leq C \|\hat{v}\|_{L^2(\hat{K})} \leq C'' \frac{1}{\rho_K} \|v\|_{L^2(K)}.$$

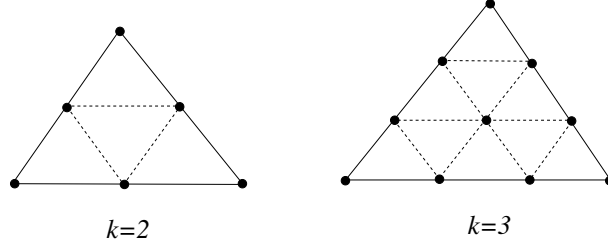


FIGURE 2. Exemples de treillis d'ordre 2 et d'ordre 3.

On en déduit

$$|v|_{l,K} \leq C \frac{h_K}{\rho_K^{l+1}} \|v\|_{L^2(K)}.$$

Or  $\frac{h_K}{\rho_K^{l+1}} = \left(\frac{h_K}{\rho_K}\right)^{l+1} \times \frac{1}{h_K^l} \leq \frac{C}{h_K^l} \leq \frac{C'}{h^l}$  car  $\mathcal{T}_h$  est uniformément régulière. Par conséquent, on obtient

$$|v|_{l,K} \leq Ch^{-l} \|v\|_{L^2(K)}$$

et donc

$$\|v\|_{l,K} \leq \left(1 + \frac{1}{h} + \frac{1}{h^2} + \cdots + \frac{1}{h^l}\right) \|v\|_{L^2(K)}.$$

On a certainement  $h \leq C|\Omega|^{1/2}$  i.e.  $1 \leq C|\Omega|^{1/2}/h$ , ce qui entraîne

$$\|v\|_{l,K} \leq \frac{C}{h^l} \|v\|_{L^2(K)},$$

où  $C > 0$  dépend de  $|\Omega|$  mais pas de  $K$  ni de  $h$ . □

★ *Interpolation.* On appelle *treillis d'ordre  $k$*  du triangle  $K$  de sommets  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ , l'ensemble (cf. Figure 2)

$$\Sigma_K = \left\{ \mathbf{x} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{a}_i; \sum_{i=1}^3 \lambda_i = 1; \lambda_i \in \left\{0, \frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \dots, \frac{k-1}{k}, 1\right\} \right\}.$$

On note

$$(2.4.2) \quad W_h = \{v \in C^0(\bar{\Omega}) \mid v|_K \in \mathbb{P}_k, \forall K \in \mathcal{T}_h\}$$

$$(2.4.3) \quad \mathcal{X}_h = W_h \cap H_0^1(\Omega)$$

PROPOSITION 2.3. *On suppose que  $\mathcal{T}_h$  est régulière et  $k \geq 1$ . Il existe un opérateur  $I_h \in \mathcal{L}(H^2(\Omega); W_h) \cap \mathcal{L}(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega); \mathcal{X}_h)$  défini sur chaque élément  $K$  par :*

$$(2.4.4) \quad I_h v|_K \in \mathbb{P}_k, \quad I_h v(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Sigma_K,$$

tel que pour  $2 \leq s \leq k+1$  :

$$\|v - I_h v\|_{L^2(\Omega)} + h \|\nabla(v - I_h v)\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^s |v|_{H^s(\Omega)} \quad \forall v \in H^s(\Omega),$$

où  $C > 0$  est indépendante de  $h$  et  $v$ .

Il s'agit ici d'un résultat d'interpolation pour des fonctions régulières, en tout cas qui sont continues pour pouvoir donner un sens à (2.4.4). Les fonctions  $v$  de la Proposition 2.3 sont bien continues car  $H^2(\Omega) \hookrightarrow C^0(\bar{\Omega})$  pour  $N \leq 3$ . Pour des fonctions non-régulières, on a le résultat d'interpolation suivant.

**PROPOSITION 2.4.** *On suppose que  $\mathcal{T}_h$  est régulière et  $k \geq 1$ . Il existe un opérateur  $R_h \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega); \mathcal{X}_h)$  et une constante  $C > 0$  indépendante de  $h$  tels que*

$$\|v - R_h v\|_{L^2(\Omega)} + h \|\nabla(v - R_h v)\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch|v|_{H^1(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

*Démonstration.* Soit  $v \in H_0^1(\Omega)$ . On définit  $R_h v \in \mathcal{X}_h$  par la solution de

$$(2.4.5) \quad \int_{\Omega} \nabla(R_h v - v) \cdot \nabla v_h \, d\mathbf{x} = 0 \quad \forall v_h \in \mathcal{X}_h.$$

Par le Lemme de Lax-Milgram, le problème (2.4.5) admet une unique solution donc l'opérateur  $R_h : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{X}_h$  est bien défini et de plus il est linéaire. Montrons qu'il est continu. On prend  $v_h = R_h v$  dans (2.4.5) et il vient

$$\begin{aligned} \|\nabla R_h v\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla R_h v \, d\mathbf{x} \\ &\leq \|\nabla R_h v\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

d'où

$$(2.4.6) \quad \|\nabla R_h v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Il reste à établir l'estimation d'erreur de la proposition.

Estimation  $H^1$ . D'après (2.4.6), on a

$$(2.4.7) \quad \|\nabla(R_h v - v)\|_{L^2(\Omega)} \leq 2\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Estimation  $L^2$ . On utilise un argument de dualité de type Aubin-Nitsche. La solution  $R_h v$  de (2.4.5) peut être interprétée comme la solution Éléments Finis du problème

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{dans } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{aligned}$$

avec  $f = \Delta v \in H^{-1}(\Omega)$ . On rappelle qu'on a supposé le domaine  $\Omega$  polygonal convexe. On considère alors la solution  $w \in H^2(\Omega)$  du problème

$$(2.4.8) \quad -\Delta w = e \quad \text{dans } \Omega$$

$$(2.4.9) \quad w = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega,$$

avec  $e = R_h v - v \in L^2(\Omega)$ . On a de plus

$$(2.4.10) \quad \|w\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|e\|_{L^2(\Omega)},$$

où  $C > 0$  est indépendante de  $e$ , c'est-à-dire indépendante de  $v$  et  $h$ . On a

$$\begin{aligned} \|R_h v - v\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} (R_h v - v)(R_h v - v) \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla(R_h v - v) \, d\mathbf{x}, \quad \text{d'après la forme faible de (2.4.8), (2.4.9),} \\ &= \int_{\Omega} \nabla(w - I_h w) \cdot \nabla(R_h v - v) \, d\mathbf{x} \end{aligned}$$

car  $I_h w \in \mathcal{X}_h$  et d'après (2.4.5), on a  $\int_{\Omega} \nabla I_h w \cdot \nabla (R_h v - v) d\mathbf{x} = 0$ . Ainsi, par inégalité d'Hölder,

$$\begin{aligned} \|R_h v - v\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \|\nabla(w - I_h w)\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla(R_h v - v)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq Ch|w|_{H^2(\Omega)} \|\nabla(R_h v - v)\|_{L^2(\Omega)}, \quad \text{d'après la Proposition 2.3} \\ &\leq Ch\|R_h v - v\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}, \quad \text{d'après (2.4.10) et (2.4.7).} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\|R_h v - v\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)},$$

où  $C > 0$  est indépendante de  $v$  et  $h$ .  $\square$

**4.2. Formulation mixte approchée.** Pour discrétiser le problème de Stokes par Eléments Finis, on va utiliser la formulation mixte car il est en général difficile de discrétiser l'espace  $V$  c'est-à-dire de construire une base à divergence nulle.

On rappelle qu'on se place toujours en dimension  $N = 2$ . Soit  $X_h \subset X = [H_0^1(\Omega)]^2$  et  $Y_h \subset Y = L_0^2(\Omega)$ , deux sous-espaces de dimension finie. La formulation mixte approchée s'écrit de façon abstraite :

Trouver  $\mathbf{u}_h \in X_h$ ,  $p_h \in Y_h$  tels que

$$(2.4.11) \quad a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) = (\mathbf{f}_h, \mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in X_h$$

$$(2.4.12) \quad b(\mathbf{u}_h, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in Y_h.$$

On suppose que les espaces  $X_h$  et  $Y_h$  sont tels que la forme  $b$  vérifie la condition 'inf-sup' discrète suivante sur  $X_h \times Y_h$  :

*Il existe  $\beta^* > 0$  indépendante de  $h$  tel que  $\forall q_h \in Y_h$ ,  $\exists \mathbf{v}_h \in X_h$ ,  $\mathbf{v}_h \neq 0$  tel que*

$$(2.4.13) \quad b(\mathbf{v}_h, q_h) \geq \beta^* \|\mathbf{v}_h\|_X \|q_h\|_Y.$$

Sous la condition 'inf-sup' discrète (2.4.13), la formulation mixte approchée (2.4.11),(2.4.12) admet une unique solution  $(\mathbf{u}_h, p_h) \in X_h \times Y_h$  (Théorème 2.1).

Il faut faire attention au choix des espaces d'approximation  $X_h$  et  $Y_h$  pour la vitesse et la pression. Ils doivent être choisis de telle sorte que la condition 'inf-sup' discrète (2.4.13) soit satisfaite. Dans l'exemple suivant, on considère l'approximation  $\mathbb{P}_1/\mathbb{P}_1$  et on montre que le problème associé est mal posé à cause d'un phénomène de verrouillage sur la vitesse. On montre également que la condition 'inf-sup' discrète n'est pas satisfaite pour cet exemple.

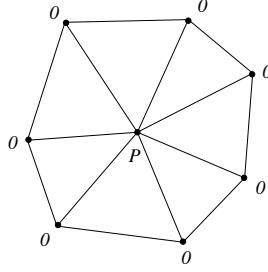
Exemple  $\mathbb{P}_1/\mathbb{P}_1$  (contre-exemple).

On considère les espaces d'approximation suivants.

$$\begin{aligned} W_h &= \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}) \mid v_h|_K \in \mathbb{P}_1, \forall K \in \mathcal{T}_h\}, \\ X_h &= W_h \times X_h \cap H_0^1(\Omega)^2, \\ Y_h &= W_h \cap L_0^2(\Omega). \end{aligned}$$

*i) Verrouillage numérique.* On peut montrer que dans cet exemple, le problème (2.4.11),(2.4.12) est mal posé. En effet, soit

$$V_h = \{\mathbf{v}_h \in X_h \mid (\operatorname{div} \mathbf{v}_h, q_h) = 0, \forall q_h \in Y_h\}.$$

FIGURE 3. Exemple  $\mathbb{P}_1/\mathbb{P}_1$  : verrouillage numérique de la vitesse.

Alors, en général, on a  $V_h = \{0\}$ . Par exemple, choisissons le domaine  $\Omega$  comme sur la Figure 3 avec la triangulation indiquée. Soit  $\varphi_h \in W_h$  tel que

$$\varphi_h(Q) = \begin{cases} 1 & \text{si } Q = P, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Tout  $\mathbf{v}_h \in X_h$  s'écrit  $\mathbf{v}_h(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_h(P)\varphi_h(\mathbf{x})$  et on a  $\operatorname{div} \mathbf{v}_h = \mathbf{v}_h(P) \cdot \nabla \varphi_h$ . Soit maintenant  $\mathbf{v}_h \in V_h$ . On a

$$(2.4.14) \quad 0 = (\operatorname{div} \mathbf{v}_h, q_h) = \mathbf{v}_h(P) \cdot \int_{\Omega} (\nabla \varphi_h) q_h \, d\mathbf{x}.$$

On choisit  $q_h = x_1 \in W_h$ . Par intégration par parties ( $\varphi_h = 0$  sur  $\partial\Omega$ ), on obtient

$$(2.4.15) \quad \int_{\Omega} (\nabla \varphi_h) q_h \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \varphi_h \nabla q_h \, d\mathbf{x} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \int_{\Omega} \varphi_h \, d\mathbf{x} \neq 0.$$

Par conséquent, avec (2.4.14) et (2.4.15), on obtient  $[\mathbf{v}_h(P)]_1 = 0$ . De même en prenant  $q_h = x_2 \in W_h$ , on obtient  $[\mathbf{v}_h(P)]_2 = 0$  et ainsi  $\mathbf{v}_h \equiv 0$ . Il s'agit d'un phénomène de *verrouillage* numérique de la vitesse.

*ii) Condition 'inf-sup' non satisfaite.* On peut également montrer qu'avec cet exemple, il n'y a pas unicité de la pression  $p_h$ . En effet, admettons pour l'instant l'existence d'une fonction  $p_h^* \in Y_h$  telle que

$$(2.4.16) \quad (\operatorname{div} \mathbf{v}_h, p_h^*) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in X_h.$$

Dans ce cas, on a

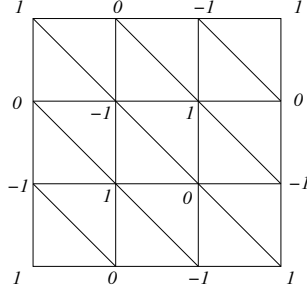
$$(\operatorname{div} \mathbf{v}_h, q_h + c p_h^*) = (\operatorname{div} \mathbf{v}_h, q_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in X_h, \forall q_h \in Y_h, \forall c \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent, si  $p_h$  est solution alors  $p_h + c p_h^*$  est encore solution. Il n'y a donc pas unicité de la pression.

Pour montrer qu'il existe bien  $p_h^* \in Y_h$  vérifiant (2.4.16), on prend l'exemple où le domaine  $\Omega$  est un carré avec une triangulation uniforme comme indiqué sur la Figure 4. Soit  $p_h^* \in W_h$  la fonction qui vaut alternativement 0, 1 et  $-1$  sur les sommets; chaque triangle doit avoir exactement ces 3 valeurs à ses sommets (voir

Figure 4). On a bien  $p_h^* \in Y_h$  car  $\int_{\Omega} p_h^* \, d\mathbf{x} = 0$ . En effet, on a

$$\int_{\Omega} p_h^* \, d\mathbf{x} = \sum_K \int_K p_h^* \, d\mathbf{x} = \sum_K \frac{|K|}{3} \sum_{i=1}^3 p_h^*(\mathbf{a}_i^K),$$

FIGURE 4. Exemple  $\mathbb{P}_1/\mathbb{P}_1$  : non unicité de la pression.

où  $\mathbf{a}_i^K$  désigne les sommets du triangle  $K$ . Or, par construction de  $p_h^*$ , on a  $\sum_{i=1}^3 p_h^*(\mathbf{a}_i^K) = 0$  et donc on a bien  $\int_{\Omega} p_h^* d\mathbf{x} = 0$ . De plus,

$$(\operatorname{div} \mathbf{v}_h, p_h^*) = \sum_K \int_K (\operatorname{div} \mathbf{v}_h) p_h^* d\mathbf{x} = \sum_K (\operatorname{div} \mathbf{v}_h)|_K \int_K p_h^* d\mathbf{x}.$$

Par construction de  $p_h^*$ , on a encore  $\int_K p_h^* d\mathbf{x} = 0$  et donc  $(\operatorname{div} \mathbf{v}_h, p_h^*) = 0$ . La relation (2.4.16) est ainsi vérifiée.

L'existence d'un  $p_h^*$  vérifiant (2.4.16) montre que la condition 'inf-sup' discrète (2.4.13) n'est pas vérifiée par les éléments  $\mathbb{P}_1/\mathbb{P}_1$ .

On peut montrer de la même façon que la condition 'inf-sup' discrète n'est pas non plus vérifiée par les éléments  $\mathbb{P}_1/\mathbb{P}_0$  où l'espace d'approximation  $X_h$  pour la vitesse est le même que précédemment mais où l'espace approché pour la pression est donné par

$$Y_h = \{q_h \in L_0^2(\Omega) \mid q_h|_K \in \mathbb{P}_0, \forall K \in \mathcal{T}_h\}.$$

### 4.3. Éléments Finis pour le problème de Stokes.

*i) Éléments Finis  $\mathbb{P}_1$ -bulle/ $\mathbb{P}_1$ .*

Soient  $\lambda_1^K, \lambda_2^K, \lambda_3^K$  les coordonnées barycentriques par rapport à un triangle  $K$ . On note  $\mu^K$  la fonction "bulle" associée au triangle  $K$  et définie par

$$(2.4.17) \quad \mu^K = \begin{cases} \lambda_1^K \lambda_2^K \lambda_3^K & \text{sur } K, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

On a  $\mu|_K^K \in \mathbb{P}_3$  (d'où le terme de fonction "bulle") et  $\mu^K \equiv 0$  sur le bord  $\partial K$ . La fonction "bulle"  $\mu^K$  est continue sur  $\bar{\Omega}$ . On considère alors le sous-espace  $X_h$  de  $[H_0^1(\Omega)]^2$  défini par

$$(2.4.18) \quad X_h = \left\{ \mathbf{v}_h \in C^0(\bar{\Omega})^2 \mid \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i^K \lambda_i^K(\mathbf{x}) + \beta^K \mu^K(\mathbf{x}) \right. \\ \left. \text{avec } \alpha_i^K, \beta_i^K \in \mathbb{R}^2, \forall \mathbf{x} \in K, \forall K \in \mathcal{T}_h \text{ et } \mathbf{v}_h = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}.$$

L'espace  $X_h$  est composé des fonctions continues sur  $\bar{\Omega}$ , nulles sur le bord et somme d'une fonction affine par morceaux et d'une combinaison linéaire de fonctions "bulles" (les fonctions  $\mu^K$  sont nulles en dehors de  $K$ ). On a  $\dim X_h = 2(Ns + Nt)$  où  $Ns$  est le nombre de sommets de la triangulation et  $Nt$  le nombre de triangles. Pour la pression, on choisit

$$(2.4.19) \quad Y_h = \left\{ q_h \in C^0(\bar{\Omega}) \mid q_h|_K \in \mathbb{P}_1, \forall K \in \mathcal{T}_h \right\} \cap L_0^2(\Omega).$$

On a  $\dim Y_h = Ns - 1$ .

Vérification de la condition 'inf-sup' discrète pour  $\mathbb{P}_1$ -bulle/ $\mathbb{P}_1$ .

On doit montrer qu'il existe  $\beta^* > 0$  tel que  $\forall q_h \in Y_h, \exists \mathbf{u}_h \in X_h, \mathbf{u}_h \neq 0$  tel que

$$(2.4.20) \quad b(\mathbf{u}_h, q_h) \geq \beta^* \|\mathbf{u}_h\|_{H^1(\Omega)^2} \|q_h\|_{L^2(\Omega)}.$$

On suppose que la triangulation  $\mathcal{T}_h$  est uniformément régulière. Soit  $q_h \in Y_h$  fixé. Puisque  $Y_h \subset Y$  et que  $b$  vérifie la condition 'inf-sup' continue sur  $X \times Y$ , il existe un  $\mathbf{u} \in X = [H_0^1(\Omega)]^2$  tel que

$$(2.4.21) \quad b(\mathbf{u}, q_h) \geq \beta \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)^2} \|q_h\|_{L^2(\Omega)},$$

avec  $\beta > 0$  indépendant de  $q_h$  (en revanche  $\mathbf{u}$  dépend bien sûr de  $q_h$ ). Pour établir (2.4.20), il suffit alors de montrer l'existence de  $\mathbf{u}_h \in X_h$  tel que

$$(2.4.22) \quad b(\mathbf{u}_h, q_h) = b(\mathbf{u}, q_h),$$

$$(2.4.23) \quad \|\mathbf{u}_h\|_{H^1(\Omega)^2} \leq C \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)^2},$$

où  $C > 0$  est indépendante de  $q_h$  et  $h$ . En effet, si (2.4.22) et (2.4.23) sont vérifiées alors on obtient (2.4.20) avec  $\beta^* = \beta/C > 0$ . De plus, puisque  $Y_h \subset H^1(\Omega)$ , la relation (2.4.22) est équivalente à

$$\int_{\Omega} \mathbf{u}_h \cdot \nabla q_h \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla q_h \, d\mathbf{x}.$$

Or  $\nabla q_h$  est constant sur chaque triangle donc il suffit de trouver  $\mathbf{u}_h \in X_h$  tel que

$$(2.4.24) \quad \int_K \mathbf{u}_h \, d\mathbf{x} = \int_K \mathbf{u} \, d\mathbf{x} \quad \forall K \in \mathcal{T}_h,$$

$$(2.4.25) \quad \|\mathbf{u}_h\|_{H^1(\Omega)^2} \leq C \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)^2},$$

où  $C > 0$  est indépendante de  $h$ .

Cherchons donc  $\mathbf{u}_h \in X_h$  vérifiant (2.4.24), (2.4.25). Toute fonction  $\mathbf{v}_h \in X_h$  est déterminée de façon unique par ses valeurs aux sommets des triangles n'appartenant pas au bord  $\partial\Omega$  (i.e. les valeurs  $\mathbf{v}_h(\mathbf{a}_i)$ ,  $\forall \mathbf{a}_i$  sommet  $\notin \partial\Omega$ ) et ses valeurs moyennes  $\int_K \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x}$  sur les triangles  $K$ . En effet, pour  $\mathbf{v}_h \in X_h$ , on a, pour tout  $K \in \mathcal{T}_h$  :

$$\mathbf{v}_h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^3 \mathbf{v}_h(\mathbf{a}_i^K) \lambda_i(\mathbf{x}) + \beta^K \mu^K(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in K$$

et  $\beta^K$  est déterminé par la relation

$$\int_K \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{v}_h(\mathbf{a}_i^K) \int_K \lambda_i^K \, d\mathbf{x} + \beta^K \int_K \mu^K \, d\mathbf{x}.$$

On choisit alors  $\mathbf{u}_h \in X_h$  tel que

$$(2.4.26) \quad \mathbf{u}_h(\mathbf{a}_i) = R_h \mathbf{u}(\mathbf{a}_i) \quad \forall \mathbf{a}_i \text{ sommets de } \mathcal{T}_h,$$

$$(2.4.27) \quad \int_K \mathbf{u}_h \, d\mathbf{x} = \int_K \mathbf{u} \, d\mathbf{x} \quad \forall K \in \mathcal{T}_h,$$

où  $R_h \mathbf{u} \in X_h$  et l'opérateur  $R_h$  est défini à partir de la Proposition 2.4. On a besoin du projecteur  $R_h$  car  $\mathbf{u} \in [H_0^1(\Omega)]^2$  n'est pas nécessairement continue et cela n'aurait pas de sens de parler de  $\mathbf{u}(\mathbf{a}_i)$  ...

Il reste à établir l'estimation (2.4.25). On a

$$\mathbf{u}_{h|K} = \sum_{i=1}^3 R_h \mathbf{u}(\mathbf{a}_i^K) \lambda_i^K + \beta^K \mu^K$$

soit encore

$$(2.4.28) \quad \mathbf{u}_{h|K} = R_h \mathbf{u}|_K + \beta^K \mu^K.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_h\|_{H^1(\Omega)^2}^2 &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\mathbf{u}_h\|_{H^1(K)^2}^2 \\ &\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\|R_h \mathbf{u}\|_{H^1(K)^2} + |\beta^K| \|\mu^K\|_{H^1(K)})^2 \\ &\leq 2 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\|R_h \mathbf{u}\|_{H^1(K)^2}^2 + |\beta^K|^2 \|\mu^K\|_{H^1(K)}^2) \\ &= 2\|R_h \mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)^2}^2 + 2 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |\beta^K|^2 \|\mu^K\|_{H^1(K)}^2 \\ &\leq C \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)^2}^2 + 2 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |\beta^K|^2 \|\mu^K\|_{H^1(K)}^2 \quad \text{d'après la proposition (2.4),} \end{aligned}$$

où  $C > 0$  est indépendante de  $\mathbf{u}$  et de  $h$ . Par ailleurs, d'après (2.4.28) et (2.4.25), on a

$$\int_K \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = \int_K \mathbf{u}_h \, d\mathbf{x} = \int_K R_h \mathbf{u} \, d\mathbf{x} + \beta^K \int_K \mu^K \, d\mathbf{x},$$

d'où

$$(2.4.29) \quad \beta^K = \frac{\int_K (\mathbf{u} - R_h \mathbf{u}) \, d\mathbf{x}}{\int_K \mu^K \, d\mathbf{x}}.$$

D'après la formule d'intégration (2.4.1), on obtient

$$(2.4.30) \quad \int_K \mu^K \, d\mathbf{x} = \int_K \lambda_1^K \lambda_2^K \lambda_3^K \, d\mathbf{x} = \frac{|K|}{60}.$$

Par Cauchy-Schwarz, l'expression (2.4.29) de  $\beta^K$  conduit à

$$|\beta^K| \leq 60 \frac{\|\mathbf{u} - R_h \mathbf{u}\|_{L^2(K)^2}}{|K|^{1/2}}.$$

Or  $|K| \geq \frac{\pi}{4} \rho_K^2$  (l'aire d'un triangle est plus grande que celle du cercle inscrit) et par conséquent

$$\frac{1}{|K|^{1/2}} \leq C' \frac{1}{\rho_K} \leq C'' \frac{1}{h}$$



car la triangulation est supposée uniformément régulière. On obtient donc

$$|\beta^K| \leq \frac{C}{h} \|\mathbf{u} - R_h \mathbf{u}\|_{L^2(K)^2}$$

où  $C > 0$  est indépendant de  $h$  et  $K$ . Par ailleurs, d'après la Proposition 2.1, on a

$$\begin{aligned} \|\mu^K\|_{H^1(K)^2} &\leq C \left( h_K + \frac{h_K}{\rho_K} \right) \\ &\leq C' \quad \text{indépendant de } K \text{ et } h. \end{aligned}$$

On obtient donc,

$$\|\mathbf{u}_h\|_{H^1(\Omega)^2}^2 \leq C \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)^2}^2 + \frac{C}{h^2} \|R_h \mathbf{u} - \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)^2}^2.$$

On conclut en utilisant la Proposition 2.4 que

$$\|\mathbf{u}_h\|_{H^1(\Omega)^2}^2 \leq C \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)^2}^2.$$

On a ainsi montré que l'élément  $\mathbb{P}_1$ -bulle/ $\mathbb{P}_1$  vérifie la condition 'inf-sup' discrète.  $\square$

*Remarque.* On peut remplacer la fonction "bulle" par une fonction nulle sur le bord  $\partial K$ , affine par morceaux sur les 3 triangles obtenus en coupant  $K$  par son centre. Cet élément vérifie aussi la condition 'inf-sup' discrète.

ii) Eléments Finis  $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$ .

On choisit

$$(2.4.31) \quad X_h = \{ \mathbf{v} \in C^0(\overline{\Omega})^2 \mid \mathbf{v}|_K \in \mathbb{P}_2^2, \forall K \in \mathcal{T}_h, \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \},$$

$$(2.4.32) \quad Y_h = \{ q \in C^0(\overline{\Omega}) \mid q|_K \in \mathbb{P}_1, \forall K \in \mathcal{T}_h \} \cap L_0^2(\Omega).$$

Les degrés de libertés pour la vitesse sont les sommets de la triangulation et les points milieux des arêtes des triangles de  $\mathcal{T}_h$  (qui ne sont pas sur le bord  $\partial\Omega$ ). Les degrés de liberté de la pression sont les sommets de la triangulation  $\mathcal{T}_h$ .

Vérification de la condition 'inf-sup' discrète pour  $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$ .

On suppose que la triangulation  $\mathcal{T}_h$  est *uniformément régulière*. On suppose en plus qu'*aucun triangle de  $\mathcal{T}_h$  n'a deux côtés sur le bord  $\partial\Omega$* , autrement dit tout triangle a au moins un sommet à l'intérieur de  $\Omega$ . On veut montrer qu'il existe  $\beta^* > 0$  tel que  $\forall q_h \in Y_h, \exists \mathbf{u}_h \in X_h, \mathbf{u}_h \neq 0$  tel que

$$(2.4.33) \quad b(\mathbf{u}_h, q_h) \geq \beta^* \|\mathbf{u}_h\|_{H^1(\Omega)^2} \|q_h\|_{L^2(\Omega)}.$$

Soit  $q_h \in Y_h$  fixé. On choisit  $\mathbf{u}_h \in X_h$  tel que  $\mathbf{u}_h = 0$  à tous les sommets de la triangulation  $\mathcal{T}_h$  ainsi qu'à tous les points milieux du bord  $\partial\Omega$ . De plus, pour tout point milieu  $\mathbf{m}_e$  intérieur à  $\Omega$ , on choisit :

$$(2.4.34) \quad \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{t}_e(\mathbf{m}_e) = \nabla q_h \cdot \mathbf{t}_e(\mathbf{m}_e),$$

$$(2.4.35) \quad \mathbf{u}_h \cdot \nu_e(\mathbf{m}_e) = 0,$$

où  $\nu_e$  désigne un vecteur unitaire normal au triangle  $K$  ayant  $\mathbf{m}_e$  comme point milieu d'une de ses arêtes et  $\mathbf{t}_e$  est un vecteur tangent unitaire correspondant (cf.

Figure 5). Il est important de remarquer que  $\nabla q_h \cdot \mathbf{t}_e(\mathbf{m}_e)$  a bien un sens car  $\nabla q_h \cdot \mathbf{t}_e$  est continue à travers l'arête  $e$ . Puisque  $q_h \in Y_h \subset H^1(\Omega)$ , on a

$$b(\mathbf{u}_h, q_h) = \int_{\Omega} \mathbf{u}_h \cdot \nabla q_h \, d\mathbf{x} = \sum_K \int_K \mathbf{u}_h \cdot \nabla q_h \, d\mathbf{x}.$$

Or  $\nabla q_h$  est constant sur  $K$  donc par la formule d'intégration des points milieux (exacte pour les polynômes  $\mathbb{P}_2$ ), on a

$$\begin{aligned} \int_K \mathbf{u}_h \cdot \nabla q_h \, d\mathbf{x} &= \int_K \mathbf{u}_h \, d\mathbf{x} \cdot \nabla q_h|_K = \frac{|K|}{3} \sum_{\substack{\mathbf{m}_e \in K \\ \mathbf{m}_e \notin \partial\Omega}} \mathbf{u}_h(\mathbf{m}_e) \cdot \nabla q_h|_K, \\ &= \frac{|K|}{3} \sum_{\substack{\mathbf{m}_e \in K \\ \mathbf{m}_e \notin \partial\Omega}} (\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{t}_e(\mathbf{m}_e)) \mathbf{t}_e(\mathbf{m}_e) \cdot \nabla q_h|_K, \\ &= \frac{|K|}{3} \sum_{\substack{\mathbf{m}_e \in K \\ \mathbf{m}_e \notin \partial\Omega}} (\nabla q_h \cdot \mathbf{t}_e(\mathbf{m}_e)) \mathbf{t}_e(\mathbf{m}_e) \cdot \nabla q_h|_K, \end{aligned}$$

d'après le choix (2.4.34) de  $\mathbf{u}_h$ . On obtient ainsi

$$\int_K \mathbf{u}_h \cdot \nabla q_h \, d\mathbf{x} = \frac{|K|}{3} \sum_{\substack{\mathbf{m}_e \in K \\ \mathbf{m}_e \notin \partial\Omega}} \left| \nabla q_h|_K \cdot \mathbf{t}_e(\mathbf{m}_e) \right|^2.$$

La somme précédente porte au moins sur 2 points milieux internes d'après l'hypothèse qui a été faite sur la triangulation, à savoir que chaque triangle a au moins un sommet à l'intérieur de  $\Omega$ . On suppose alors que la somme porte au moins sur les points milieux  $\mathbf{m}_{e1}$  et  $\mathbf{m}_{e2}$  comme indiqués sur la Figure 5. Montrons alors qu'il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $K$  et  $h$  telle que

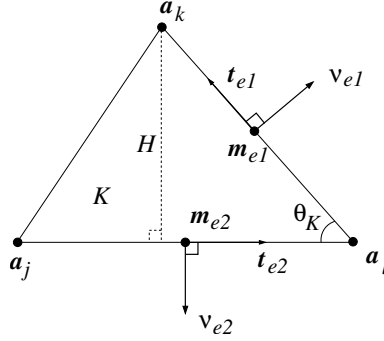
$$(2.4.36) \quad \sum_{\substack{\mathbf{m}_e \in K \\ \mathbf{m}_e \notin \partial\Omega}} \left| \nabla q_h|_K \cdot \mathbf{t}_e(\mathbf{m}_e) \right|^2 \geq C |\nabla q_h|_K|^2.$$

Avec les notations de la Figure 5, on a  $\nabla q_h|_K = \alpha_1 \nu_{e1} + \alpha_2 \nu_{e2}$ . Par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned} \nabla q_h|_K \cdot \mathbf{t}_{e1} &= \alpha_2 \nu_{e2} \cdot \mathbf{t}_{e1}, \\ \nabla q_h|_K \cdot \mathbf{t}_{e2} &= \alpha_1 \nu_{e1} \cdot \mathbf{t}_{e2}. \end{aligned}$$

Compte tenu de l'hypothèse faite sur la triangulation et rappelée ci-dessus, il vient

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\mathbf{m}_e \in K \\ \mathbf{m}_e \notin \partial\Omega}} \left| \nabla q_h|_K \cdot \mathbf{t}_e(\mathbf{m}_e) \right|^2 &\geq \left| \nabla q_h|_K \cdot \mathbf{t}_{e1}(\mathbf{m}_{e1}) \right|^2 + \left| \nabla q_h|_K \cdot \mathbf{t}_{e2}(\mathbf{m}_{e2}) \right|^2 \\ &= |\alpha_2 \cos(\pi/2 + \theta_K)|^2 + |\alpha_1 \cos(\pi/2 + \theta_K)|^2 \\ &= (|\alpha_2|^2 + |\alpha_1|^2) \sin^2(\theta_K), \end{aligned}$$

FIGURE 5. Vérification de la condition 'inf-sup' pour l'élément  $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$ 

où  $\theta_K$  est l'angle entre les arêtes  $e1$  et  $e2$  (cf. Figure 5). Or  $|\nabla q_h|_K|^2 \leq 2(|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2)$ , donc

$$\sum_{\substack{\mathbf{m}_e \in K \\ \mathbf{m}_e \notin \partial\Omega}} \left| \nabla q_h|_K \cdot \mathbf{t}_e(\mathbf{m}_e) \right|^2 \geq \frac{1}{2} |\nabla q_h|_K|^2 \sin^2(\theta_K).$$

Par ailleurs, on a (cf. Figure 5)

$$\sin \theta_K = \frac{H}{|\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_l|},$$

où  $H$  est la hauteur du triangle  $K$  et  $\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_l$  sont les deux sommets, extrémités de l'arête  $e1$ . On a clairement  $H > \rho_K$  et  $|\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_l| \leq h_K$ . On obtient donc

$$\sin \theta_K \geq \frac{\rho_K}{h_K} \geq \frac{1}{\sigma},$$

car la triangulation  $\mathcal{T}_h$  est supposée *régulière*. Ainsi, on a

$$\int_K \mathbf{u}_h \cdot \nabla q_h \, d\mathbf{x} \geq \frac{|K|}{6\sigma^2} |\nabla q_h|_K|^2 = \frac{1}{6\sigma^2} \int_K |\nabla q_h|_K|^2 \, d\mathbf{x}.$$

En sommant sur les triangles  $K$ , on obtient

$$(2.4.37) \quad b(\mathbf{u}_h, q_h) \geq C \|\nabla q_h\|_{L^2(\Omega)}^2$$

avec  $C = 1/(6\sigma^2) > 0$  est indépendante de  $h$ . On note  $\varphi_i^K$ , pour  $i = 1, 2, 3$ , les 3 fonctions de base  $\mathcal{P}_2$  associées aux points milieux  $\mathbf{m}_i$ . Puisque  $\mathbf{u}_h$  est nul aux sommets des triangles, on a sur chaque triangle  $K$  :

$$\mathbf{u}_h|_K = \sum_{i=1}^3 \mathbf{u}_h(\mathbf{m}_i) \varphi_i^K.$$

On en déduit

$$\|\mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega)^2}^2 = \sum_K \int_K |\mathbf{u}_h|^2 \, d\mathbf{x} \leq C \sum_K \sum_{i=1}^3 |\mathbf{u}_h(\mathbf{m}_i)|^2 \int_K |\varphi_i^K|^2 \, d\mathbf{x}.$$

Or, on a  $\int_K |\varphi_i^K|^2 dx \leq C'|K|$  où  $C' > 0$  est une constante indépendante de  $K$  et  $h$ . On obtient ainsi

$$\|\mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \leq C'' \sum_K |K| \sum_{i=1}^3 |\mathbf{u}_h(\mathbf{m}_i)|^2.$$

Compte tenu de la construction de  $\mathbf{u}_h$ , on a

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}_h(\mathbf{m}_i)| &= |(\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{t}_{e_i}(\mathbf{m}_i)) \mathbf{t}_{e_i}| = |\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{t}_{e_i}(\mathbf{m}_i)| \\ &= |\nabla q_h \cdot \mathbf{t}_{e_i}(\mathbf{m}_i)| \\ &\leq |\nabla q_h|_K| \end{aligned}$$

et donc

$$\|\mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \leq C \sum_K |K| |\nabla q_h|_K|^2 = C \|\nabla q_h\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Ainsi,

$$(2.4.38) \quad \|\mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega)^2} \leq C \|\nabla q_h\|_{L^2(\Omega)}$$

où  $C > 0$  est indépendante de  $h$ . Les inégalités (2.4.37) et (2.4.38) montrent que

$$(2.4.39) \quad b(\mathbf{u}_h, q_h) \geq C \|\mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega)^2} \|\nabla q_h\|_{L^2(\Omega)},$$

où  $C > 0$  est indépendante de  $h$ . Il ne s'agit pas exactement de la condition (2.4.33) cherchée. Mais puisque la triangulation  $\mathcal{T}_h$  est supposée *uniformément régulière*, on a l'inégalité inverse

$$\|\mathbf{u}_h\|_{H^1(\Omega)^2} \leq Ch^{-1} \|\mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega)^2}.$$

L'estimation (2.4.39) devient alors

$$(2.4.40) \quad b(\mathbf{u}_h, q_h) \geq Ch \|\mathbf{u}_h\|_{H^1(\Omega)^2} \|\nabla q_h\|_{L^2(\Omega)}.$$

Soit  $\gamma > 0$  une constante indépendante de  $K$  et  $h$ , à fixer plus tard.

★ *1er cas* : Si  $q_h$  vérifie

$$(2.4.41) \quad \|q_h\|_{L^2(\Omega)} \leq \gamma h \|\nabla q_h\|_{L^2(\Omega)},$$

alors d'après (2.4.40), on a

$$b(\mathbf{u}_h, q_h) \geq \frac{C}{\gamma} h \|\mathbf{u}_h\|_{H^1(\Omega)^2} \|q_h\|_{L^2(\Omega)},$$

ce qui prouve la condition 'inf-sup' discrete (2.4.33) pour  $q_h$  vérifiant (2.4.41) avec  $\gamma > 0$  donné.

★ *2ème cas* : Si  $q_h$  est tel que

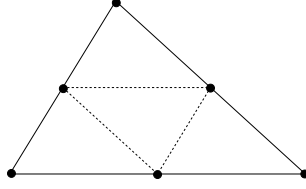
$$(2.4.42) \quad \|q_h\|_{L^2(\Omega)} > \gamma h \|\nabla q_h\|_{L^2(\Omega)},$$

alors dans ce cas on applique le Lemme 2.1 pour obtenir l'existence d'un  $\mathbf{w} \in [H_0^1(\Omega)]^2$  tel que  $\operatorname{div} \mathbf{w} = q_h$  et

$$(2.4.43) \quad \|\mathbf{w}\|_{H^1(\Omega)^2} \leq C \|q_h\|_{L^2(\Omega)}.$$

De plus, par la Proposition 2.4, il existe  $R_h \mathbf{w} \in X_h$  tel que

$$\|\mathbf{w} - R_h \mathbf{w}\|_{L^2(\Omega)^2} + h \|\nabla(\mathbf{w} - R_h \mathbf{w})\|_{L^2(\Omega)^2} \leq Ch \|\mathbf{w}\|_{H^1(\Omega)^2}.$$

FIGURE 6. Degrés de liberté pour la vitesse dans l'élément  $\mathbb{P}_1\text{-iso-}\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$ .

On a

$$\begin{aligned}
 b(R_h \mathbf{w}, q_h) &= (\operatorname{div} R_h \mathbf{w}, q_h) \\
 &= (\operatorname{div} \mathbf{w}, q_h) + (\operatorname{div} (R_h \mathbf{w} - \mathbf{w}), q_h) \\
 &= \|q_h\|_{L^2(\Omega)}^2 - \int_{\Omega} (R_h \mathbf{w} - \mathbf{w}) \cdot \nabla q_h \, d\mathbf{x} \\
 &\geq \|q_h\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|R_h \mathbf{w} - \mathbf{w}\|_{L^2(\Omega)^2} \|\nabla q_h\|_{L^2(\Omega)}.
 \end{aligned}$$

Or, d'après la Proposition 2.4 et l'estimation (2.4.43), on a

$$\|R_h \mathbf{w} - \mathbf{w}\|_{L^2(\Omega)^2} \leq Ch \|\mathbf{w}\|_{H^1(\Omega)} \leq C' h \|q_h\|_{L^2(\Omega)}.$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned}
 b(R_h \mathbf{w}, q_h) &\geq \|q_h\|_{L^2(\Omega)}^2 - C' h \|q_h\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla q_h\|_{L^2(\Omega)} \\
 &\geq (1 - C'/\gamma) \|q_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad \text{d'après (2.4.42)}.
 \end{aligned}$$

Pour  $\gamma$  suffisamment grand  $1 - C'/\gamma > 0$ . De plus,

$$\|R_h \mathbf{w}\|_{H^1(\Omega)^2} \leq C \|\mathbf{w}\|_{H^1(\Omega)^2} \leq C'' \|q_h\|_{L^2(\Omega)}.$$

Donc,

$$b(R_h \mathbf{w}, q_h) \geq \frac{1}{C''} (1 - C'/\gamma) \|R_h \mathbf{w}\|_{H^1(\Omega)^2} \|q_h\|_{L^2(\Omega)}.$$

En résumé, si on choisit  $\gamma > 0$  tel que  $1 - C'/\gamma > 0$ , alors la condition 'inf-sup' discrète (2.4.13) est vérifiée avec  $\beta^* = \min\left(\frac{C}{\gamma}, \frac{1}{C''} (1 - C'/\gamma)\right)$ .  $\square$

*Remarque.* On peut remplacer l'élément  $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$  par l'élément  $\mathbb{P}_1\text{-iso-}\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$  obtenu en considérant

$$X_h = \left\{ \mathbf{v} \in C^0(\bar{\Omega})^2 \mid \mathbf{v}|_{\tilde{K}} \in \mathbb{P}_1^2 \text{ sur chaque sous-triangle } \tilde{K} \text{ de } K, \forall K \in \mathcal{T}_h, \mathbf{v}|_{\partial\Omega} = 0 \right\}.$$

Chaque triangle  $K$  est divisé en 4 sous-triangles  $\tilde{K}$  par les milieux des arêtes (cf. Figure 6).

**4.4. Forme algébrique.** La forme algébrique du problème approché (2.4.11), (2.4.12) est obtenue de la façon suivante. On désigne par

$$\begin{aligned}
 &\{\varphi_i, i = 1, \dots, N_{X_h}\}, \\
 &\{\psi_i, i = 1, \dots, N_{Y_h}\},
 \end{aligned}$$

des bases de  $X_h$  et  $Y_h$  respectivement. On substitue dans la formulation mixte approchée (2.4.11), (2.4.12), les développements suivants :

$$(2.4.44) \quad \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_{X_h}} u_i \varphi_i(\mathbf{x}), \quad p_h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_{Y_h}} p_i \psi_i(\mathbf{x}),$$

pour obtenir le système linéaire

$$(2.4.45) \quad \begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix}$$

où les inconnues sont

$$\begin{aligned} U &= (u_1, \dots, u_{N_{X_h}})^T \in \mathbb{R}^{N_{X_h}}, \\ P &= (p_1, \dots, p_{N_{Y_h}})^T \in \mathbb{R}^{N_{Y_h}}. \end{aligned}$$

Dans le système linéaire (2.4.45), on a posé

$$\begin{aligned} F &\in \mathbb{R}^{N_{X_h}}, \quad F_j = (\mathbf{f}, \varphi_j) \\ A &\in \mathcal{M}_{N_{X_h} \times N_{X_h}}, \quad A_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j) \\ B &\in \mathcal{M}_{N_{Y_h} \times N_{X_h}}, \quad B_{ji} = b(\varphi_i, \psi_j) \end{aligned}$$

PROPOSITION 2.5. *La condition 'inf-sup' discrète (2.4.13) est vérifiée si et seulement si  $\ker B^T = \{0\}$ . Dans ce cas, la matrice*

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix}$$

*est inversible.*

*Démonstration.* On montre d'abord que la matrice  $A$  est définie positive. En effet, pour tout  $U \in \mathbb{R}^{N_{X_h}}$ ,  $U \neq 0$ , on a

$$U^T A U = a(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) > 0$$

avec  $\mathbf{u}_h$  donné par (2.4.44). Le système linéaire peut s'écrire

$$U = A^{-1}(F - B^T P), \quad BU = 0$$

et donc

$$BA^{-1}B^T P = BA^{-1}F.$$

Or,  $BA^{-1}B^T$  est définie positive si et seulement si  $\ker B^T = \{0\}$ .

- Montrons que si la condition 'inf-sup' discrète (2.4.13) est vérifiée alors  $\ker B^T = \{0\}$ . Par l'hypothèse faite, il existe  $\beta^* > 0$  tel que  $\forall q_h \in Y_h$ ,  $\exists \mathbf{u}_h \in X_h$ ,  $\mathbf{u}_h \neq 0$  tel que

$$(2.4.46) \quad b(\mathbf{u}_h, q_h) \geq \beta^* \|\mathbf{u}_h\|_X \|q_h\|_Y.$$

On a

$$(2.4.47) \quad b(\mathbf{u}_h, q_h) = \sum_{i=1}^{N_{X_h}} \sum_{j=1}^{N_{Y_h}} u_i q_j b(\varphi_i, \psi_j) = (BU, Q) = (U, B^T Q),$$

où

$$U = (u_1, \dots, u_{N_{X_h}}), \quad Q = (q_1, \dots, q_{N_{Y_h}}).$$

Soit  $Q \in \mathbb{R}^{N_{Y_h}}$  tel que  $B^T Q = 0$ . Alors, d'après (2.4.47) et (2.4.46), on obtient  $q_h = 0$  c'est-à-dire  $Q = 0$  et donc  $\ker B^T = \{0\}$ .

- Réciproquement, supposons que  $\ker B^T = \{0\}$  et montrons que la condition 'inf-sup' discrète est vérifiée. On raisonne par l'absurde : on suppose que la condition 'inf-sup' discrète (2.4.46) est fautive et on cherche à établir une contradiction avec l'hypothèse  $\ker B^T = \{0\}$ . Pour tout  $n > 0$ ,  $\exists q_n \in Y_h$ ,  $q_n \neq 0$  tel que

$$(2.4.48) \quad b(\mathbf{u}_h, q_n) < \frac{1}{n} \|\mathbf{u}_h\|_X \|q_n\|_Y \quad \forall \mathbf{u}_h \in X_h, \mathbf{u}_h \neq 0.$$

On peut toujours supposer (en renormalisant) que

$$(2.4.49) \quad \|q_n\|_Y = 1$$

et alors d'après (2.4.48), on a

$$(2.4.50) \quad b(\mathbf{u}_h, q_n) \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty, \quad \forall \mathbf{u}_h \in X_h.$$

D'après (2.4.49), il existe une sous-suite encore notée  $q_n$  telle que  $q_n \rightarrow q \in Y_h$  (en dimension finie, la boule fermée unité est compacte). Par continuité de la forme  $b$ , on a  $b(\mathbf{u}_h, q_n) \rightarrow b(\mathbf{u}_h, q)$  et donc d'après (2.4.50), on a nécessairement

$$b(\mathbf{u}_h, q) = 0 \quad \forall \mathbf{u}_h \in X_h.$$

Or,  $b(\mathbf{u}_h, q) = (U, B^T Q) = 0 \quad \forall U \in \mathbb{R}^{N_{X_h}}$ . On en déduit  $B^T Q = 0$  et donc  $Q = 0$  car par hypothèse  $\ker B^T = \{0\}$ . Par conséquent  $q = 0$ , ce qui contredit (2.4.49).  $\square$

## 5. Etude de la convergence des approximations.

**5.1. Résultats généraux.** On note  $X_h \subset X$  et  $Y_h \subset Y$  deux sous-espaces vectoriels de dimension finie. On suppose que la condition 'inf-sup' discrète (2.4.13) est vérifiée par la forme  $b$  sur  $X_h \times Y_h$ . Soit

$$(2.5.1) \quad V_h = \{\mathbf{v}_h \in X_h \mid b(\mathbf{v}_h, q_h) = 0, \forall q_h \in Y_h\}.$$

Commençons par un premier résultat pour l'approximation des vitesses dans  $V_h$ . Ce résultat est à rapprocher du Lemme de Céa pour les problèmes elliptiques.

**PROPOSITION 2.6.** *Soit  $(\mathbf{u}, p)$  la solution du problème de Stokes (2.2.6), (2.2.7) et  $\mathbf{u}_h$  l'approximation déterminée par (2.4.11), (2.4.12). Alors, il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $h$  telle que*

$$(2.5.2) \quad \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_X \leq C \left( \inf_{\mathbf{v}_h \in V_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_X + \inf_{q_h \in Y_h} \|p - q_h\|_Y \right).$$

*Démonstration.* On a  $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = (\mathbf{f}, \mathbf{v})$ ,  $\forall \mathbf{v} \in X$  et d'autre part  $a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h)$ ,  $\forall \mathbf{v}_h \in V_h$ . On prend alors  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_h \in V_h$  dans la première relation et il vient  $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h) = a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)$ , soit

$$(2.5.3) \quad a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = -b(\mathbf{v}_h, p) = -b(\mathbf{v}_h, p - q_h) \quad \forall q_h \in Y_h.$$

Soit  $\mathbf{w}_h \in V_h$ , on a

$$\begin{aligned} a(\mathbf{w}_h - \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) &= a(\mathbf{w}_h - \mathbf{u}, \mathbf{v}_h) + a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) \\ &= a(\mathbf{w}_h - \mathbf{u}, \mathbf{v}_h) - b(\mathbf{v}_h, p - q_h) \quad \forall q_h \in Y_h, \text{ d'après (2.5.3).} \end{aligned}$$

Par continuité des formes  $a$  et  $b$ , on en déduit

$$(2.5.4) \quad a(\mathbf{w}_h - \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) \leq C \|\mathbf{v}_h\|_X \left( \|\mathbf{w}_h - \mathbf{u}\|_X + \inf_{q_h \in Y_h} \|p - q_h\|_Y \right).$$

Dans l'inégalité précédente, on prend  $\mathbf{v}_h = \mathbf{w}_h - \mathbf{u}_h$  et en utilisant la coercivité de  $a$ , on obtient

$$\alpha \|\mathbf{w}_h - \mathbf{u}_h\|_X^2 \leq C \|\mathbf{w}_h - \mathbf{u}_h\|_X \left( \|\mathbf{w}_h - \mathbf{u}\|_X + \inf_{q_h \in Y_h} \|p - q_h\|_Y \right)$$

d'où

$$(2.5.5) \quad \|\mathbf{w}_h - \mathbf{u}_h\|_X \leq \frac{C}{\alpha} \left( \|\mathbf{w}_h - \mathbf{u}\|_X + \inf_{q_h \in Y_h} \|p - q_h\|_Y \right).$$

Enfin, on a  $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_X \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{w}_h\|_X + \|\mathbf{w}_h - \mathbf{u}_h\|_X$ ,  $\forall \mathbf{w}_h \in V_h$  et d'après (2.5.5), on obtient

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_X \leq \left( 1 + \frac{C}{\alpha} \right) \inf_{\mathbf{w}_h \in V_h} \|\mathbf{w}_h - \mathbf{u}\|_X + \frac{C}{\alpha} \inf_{q_h \in Y_h} \|p - q_h\|_Y,$$

ce qui établit le résultat de la proposition.  $\square$

*Remarque.* La Proposition 2.6 est valable sans la condition 'inf-sup' discrète et ne fait appel qu'à la continuité des formes  $a$  et  $b$  ainsi qu'à la coercivité de  $a$  (ce qui est suffisant pour assurer l'existence et l'unicité de l'approximation  $\mathbf{u}_h \in V_h$ ).

**PROPOSITION 2.7.** *On suppose que  $X_h \subset X$  et  $Y_h \subset Y$  sont tels que la condition 'inf-sup' discrète (2.4.13) soit vérifiée. Alors, il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $h$  telle que*

$$(2.5.6) \quad \inf_{\mathbf{v}_h \in V_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_X \leq C \inf_{\mathbf{w}_h \in X_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{w}_h\|_X.$$

*Démonstration.* On va d'abord montrer que, pour tout  $\mathbf{z}_h \in V_h^\perp$ ,

$$(2.5.7) \quad b(\mathbf{z}_h, q_h) \geq \beta^* \|\mathbf{z}_h\|_X \|q_h\|_Y \quad \forall q_h \in Y_h.$$

On conclura alors de la façon suivante : Soit  $\mathbf{w}_h \in X_h$ . Puisque  $X_h = V_h \oplus V_h^\perp$ , on décompose  $\mathbf{w}_h = \mathbf{v}_h + \mathbf{z}_h$  avec  $\mathbf{v}_h \in V_h$ ,  $\mathbf{z}_h \in V_h^\perp$  et on a

$$b(\mathbf{z}_h, q_h) = b(\mathbf{w}_h, q_h) - b(\mathbf{v}_h, q_h) = b(\mathbf{w}_h - \mathbf{u}, q_h) \quad \forall q_h \in Y_h,$$

car  $b(\mathbf{v}_h, q_h) = b(\mathbf{u}, q_h) = 0$ ,  $\forall q_h \in Y_h$ . En utilisant (2.5.7) et la continuité de  $b$ , on aura :

$$\beta^* \|\mathbf{z}_h\|_X \|q_h\|_Y \leq C \|\mathbf{w}_h - \mathbf{u}\|_X \|q_h\|_Y \quad \forall q_h \in Y_h$$

et donc

$$(2.5.8) \quad \|\mathbf{z}_h\|_X \leq \frac{C}{\beta^*} \|\mathbf{w}_h - \mathbf{u}\|_X.$$

Par ailleurs,

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_X \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{w}_h\|_X + \|\mathbf{z}_h\|_X \leq \left( 1 + \frac{C}{\beta^*} \right) \|\mathbf{w}_h - \mathbf{u}\|_X, \quad \forall \mathbf{w}_h \in X_h.$$

La proposition sera ainsi établie. Il reste donc à montrer (2.5.7). Pour ça, on va montrer qu'il existe  $q_h \in Y_h$  tel que

$$(2.5.9) \quad b(\mathbf{v}_h, q_h) = (\mathbf{z}_h, \mathbf{v}_h)_X \quad \forall \mathbf{v}_h \in X_h.$$

Admettons (2.5.9) pour l'instant. Alors dans ce cas, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$b(\mathbf{v}_h, q_h) \leq \|\mathbf{z}_h\|_X \|\mathbf{v}_h\|_X \quad \forall \mathbf{v}_h \in X_h$$



et d'après (2.5.9), en prenant  $\mathbf{v}_h = \mathbf{z}_h$ , on a  $b(\mathbf{z}_h, q_h) = \|\mathbf{z}_h\|_X^2$  d'où

$$b(\mathbf{v}_h, q_h) \leq \frac{b(\mathbf{z}_h, q_h)}{\|\mathbf{z}_h\|_X} \|\mathbf{v}_h\|_X \quad \forall \mathbf{v}_h \in X_h.$$

En utilisant la condition 'inf-sup' discrète (2.4.13), on obtient

$$(2.5.10) \quad \beta^* \|q_h\|_Y \leq \sup_{\mathbf{v}_h \in X_h} \frac{b(\mathbf{v}_h, q_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_X} \leq \frac{b(\mathbf{z}_h, q_h)}{\|\mathbf{z}_h\|_X},$$

ce qui prouve (2.5.7). Il reste donc à établir l'existence d'un  $q_h \in Y_h$  vérifiant (2.5.7). On remarque d'abord que (2.5.7) est équivalent à se limiter à l'espace  $V_h^\perp$  c'est-à-dire que (2.5.7) est équivalent à l'existence d'un  $q_h \in Y_h$  tel que

$$(2.5.11) \quad b(\mathbf{v}_h, q_h) = (\mathbf{z}_h, \mathbf{v}_h)_X \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h^\perp.$$

En effet, pour  $\mathbf{v}_h \in X_h = V_h \oplus V_h^\perp$ , on a  $\mathbf{v}_h = \mathbf{r}_h + \mathbf{s}_h$  avec  $\mathbf{r}_h \in V_h$ ,  $\mathbf{s}_h \in V_h^\perp$  et on obtient  $b(\mathbf{v}_h, q_h) = b(\mathbf{r}_h, q_h) + b(\mathbf{s}_h, q_h) = b(\mathbf{s}_h, q_h)$  et  $(\mathbf{z}_h, \mathbf{v}_h)_X = (\mathbf{z}_h, \mathbf{r}_h)_X + (\mathbf{z}_h, \mathbf{s}_h)_X = (\mathbf{z}_h, \mathbf{s}_h)_X$ . Par ailleurs, on a

$$(2.5.12) \quad \dim Y_h = \dim V_h^\perp,$$

de sorte que (2.5.11) est un système linéaire carré. L'unicité implique l'existence. Vérifions l'unicité de (2.5.11). Supposons pour ça qu'il existe  $q_h^1, q_h^2 \in Y_h$  vérifiant (2.5.11). Alors, on a

$$b(\mathbf{v}_h, q_h^1) = b(\mathbf{v}_h, q_h^2) \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h^\perp.$$

Par la condition 'inf-sup' discrète (2.4.13), il existe  $\mathbf{v}_h \in X_h$ ,  $\mathbf{v}_h \neq 0$  tel que

$$\beta^* \|\mathbf{v}_h\|_X \|q_h^1 - q_h^2\|_Y \leq b(\mathbf{v}_h, q_h^1 - q_h^2) = 0$$

et par conséquent on a  $q_h^1 = q_h^2$ .  $\square$

Vérification de  $\dim Y_h = \dim V_h^\perp$ .

On considère  $\{\varphi_i, i = 1, \dots, N_{X_h}\}$  et  $\{\psi_i, i = 1, \dots, N_{Y_h}\}$  des bases de  $X_h$  et  $Y_h$  respectivement (cf. Section 4.4). Soit  $B \in \mathcal{M}_{N_{Y_h} \times N_{X_h}}$  la matrice définie par  $B_{ji} = b(\varphi_i, \psi_j)$ . On rappelle que

$$\dim X_h = \dim \text{Ker}(B) + \dim \text{Im}(B).$$

Si on note  $U = (u_1, \dots, u_{N_{X_h}})$  le vecteur associé à  $\mathbf{u} \in V_h$  où les  $(u_i)$  sont les coordonnées de  $\mathbf{u}$  dans la base  $(\varphi_i)$ , on a

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \in V_h &\iff b(\mathbf{u}, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in Y_h \\ &\iff \sum_{i=1}^{N_{X_h}} u_i b(\varphi_i, \psi_j) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, N_{Y_h} \\ &\iff BU = 0 \\ &\iff U \in \text{Ker}(B). \end{aligned}$$

Par conséquent

$$(2.5.13) \quad \dim V_h = \dim \text{Ker}(B).$$

Par ailleurs, puisque  $X_h = V_h \oplus V_h^\perp$ , on a  $\dim X_h = \dim V_h + \dim V_h^\perp$ . On obtient ainsi  $\dim X_h = \dim V_h + \dim V_h^\perp = \dim \text{Ker}(B) + \dim \text{Im}(B)$  d'où l'on déduit avec (2.5.13) que

$$(2.5.14) \quad \dim V_h^\perp = \dim \text{Im}(B).$$

De plus,  $\dim Y_h = \dim \text{Ker}(B^T) + \dim \text{Im}(B^T)$ . Or  $\dim \text{Ker}(B^T) = 0$  car la condition 'inf-sup' discrète est vérifiée (cf. Proposition 2.5). On obtient donc  $\dim Y_h = \dim \text{Im}(B^T)$ . Puisque  $\dim \text{Im}(B^T) = \text{rang}(B^T) = \text{rang}(B) = \dim \text{Im}(B)$ , on en déduit que

$$(2.5.15) \quad \dim Y_h = \dim \text{Im}(B).$$

En combinant (2.5.14) et (2.5.15) on obtient  $\dim V_h^\perp = \dim \text{Im}(B) = \dim Y_h$ .  $\square$

Le résultat suivant porte sur l'approximation de la pression.

PROPOSITION 2.8. *On suppose que  $X_h \subset X$  et  $Y_h \subset Y$  sont tels que la condition 'inf-sup' discrète (2.4.13) soit vérifiée. Alors, il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $h$  telle que*

$$(2.5.16) \quad \|p - p_h\|_Y \leq C \left( \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_X + \inf_{q_h \in Y_h} \|p - q_h\|_Y \right).$$

*Démonstration.* On a

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in X \\ a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in X_h. \end{aligned}$$

Donc,

$$a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p - p_h) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in X_h.$$

D'après la condition 'inf-sup' discrète, pour tout  $q_h \in Y_h$ , il existe  $\mathbf{w}_h \in X_h$ ,  $\mathbf{w}_h \neq 0$  tel que

$$\begin{aligned} \beta^* \|\mathbf{w}_h\|_X \|q_h - p_h\|_Y &\leq b(\mathbf{w}_h, p_h - q_h) \\ &= b(\mathbf{w}_h, p_h - p) + b(\mathbf{w}_h, p - q_h) \\ &= a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{w}_h) + b(\mathbf{w}_h, p - q_h). \end{aligned}$$

Par continuité de  $a$  et  $b$ , on obtient

$$\beta^* \|\mathbf{w}_h\|_X \|q_h - p_h\|_Y \leq C \|\mathbf{w}_h\|_X (\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_X + \|p - q_h\|_Y)$$

et donc

$$\|q_h - p_h\|_Y \leq \frac{C}{\beta^*} (\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_X + \|p - q_h\|_Y).$$

On conclut en écrivant  $\|p - p_h\|_Y \leq \|p - q_h\|_Y + \|q_h - p_h\|_Y$ ,  $\forall q_h \in Y_h$ .  $\square$

COROLLAIRE 2.1. *On suppose que  $X_h \subset X$  et  $Y_h \subset Y$  sont tels que la condition 'inf-sup' discrète (2.4.13) soit vérifiée. Alors, il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $h$  telle que*

$$(2.5.17) \quad \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_X + \|p - p_h\|_Y \leq C \left( \inf_{\mathbf{v}_h \in X_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_X + \inf_{q_h \in Y_h} \|p - q_h\|_Y \right).$$

**5.2. Estimations d'erreurs.** On note  $W_h \subset [H^1(\Omega)]^2$  un sous-espace de dimension finie. On fait les hypothèses suivantes pour les espaces d'approximation  $X_h$  et  $Y_h$ .

◆ **HYPOTHÈSE H1** (propriété d'approximation de  $X_h$ )

Il existe  $\Pi_h \in \mathcal{L}([H^2(\Omega)]^2; W_h) \cap \mathcal{L}([H^2(\Omega)]^2 \cap [H_0^1(\Omega)]^2; X_h)$  tel que

$$\|\mathbf{v} - \Pi_h \mathbf{v}\|_{[H^1(\Omega)]^2} \leq C_1 h \|\mathbf{v}\|_{[H^2(\Omega)]^2} \quad \forall \mathbf{v} \in [H^2(\Omega)]^2,$$

où  $C_1 > 0$  est une constante indépendante de  $h$ .

◆ **HYPOTHÈSE H2** (propriété d'approximation de  $Y_h$ )

Il existe  $S_h \in \mathcal{L}(H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega); Y_h)$  tel que

$$\|q - S_h q\|_{L^2(\Omega)} \leq C_2 h \|q\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall q \in H^1(\Omega),$$

où  $C_2 > 0$  est une constante indépendante de  $h$ .

Sous les hypothèses précédentes, on a le résultat d'estimations d'erreurs suivant.

**THÉORÈME 2.2.** *On suppose que  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  est un domaine borné, polygonal et convexe. On suppose également que les hypothèses H1 et H2 sont satisfaites ainsi que la condition 'inf-sup' discrète (2.4.13). Si la solution  $(\mathbf{u}, p)$  du problème de Stokes (2.2.6), (2.2.7) appartient à  $[H^2(\Omega)]^2 \cap [H_0^1(\Omega)]^2 \times (H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega))$ , alors on a les estimations suivantes :*

$$(2.5.18) \quad \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{[H^1(\Omega)]^2} + \|p - p_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C' h (\|\mathbf{u}\|_{[H^2(\Omega)]^2} + \|p\|_{H^1(\Omega)}),$$

$$(2.5.19) \quad \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{[L^2(\Omega)]^2} \leq C'' h^2 (\|\mathbf{u}\|_{[H^2(\Omega)]^2} + \|p\|_{H^1(\Omega)}),$$

où  $C', C''$  sont des constantes positives indépendantes de  $h$ .

*Démonstration.*

*Estimation  $H^1$ .* L'estimation (2.5.18) est une conséquence directe du Corollaire (2.1).

*Estimation  $L^2$  pour la vitesse.* On utilise un argument de dualité de type Aubin-Nitsche. Pour chaque  $\mathbf{g} \in [L^2(\Omega)]^2$ , on introduit le problème dual

Trouver  $(\varphi_{\mathbf{g}}, \xi_{\mathbf{g}}) \in X \times Y$  tels que

$$(2.5.20) \quad a(\mathbf{v}, \varphi_{\mathbf{g}}) + b(\mathbf{v}, \xi_{\mathbf{g}}) = (\mathbf{g}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in X$$

$$(2.5.21) \quad b(\varphi_{\mathbf{g}}, q) = 0 \quad \forall q \in Y.$$

On a alors le résultat intermédiaire suivant :

**LEMME 2.2.** *Il existe une constante  $C > 0$  dépendant seulement des constantes de continuité de  $a$  et  $b$ , telle que*

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{[L^2(\Omega)]^2} &\leq C (\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_X + \|p - p_h\|_Y) \\ &\quad \times \sup_{\mathbf{g} \in [L^2(\Omega)]^2} \frac{1}{\|\mathbf{g}\|_{[L^2(\Omega)]^2}} \left( \inf_{\mathbf{v}_h \in X_h} \|\varphi_{\mathbf{g}} - \mathbf{v}_h\|_X + \inf_{q_h \in Y_h} \|\xi_{\mathbf{g}} - q_h\|_Y \right). \end{aligned}$$

Admettons ce résultat pour l'instant et montrons comment on peut alors conclure pour établir l'estimation (2.5.19). Le problème (2.5.20),(2.5.21) correspond à la formulation faible du problème de Stokes suivant :

$$\begin{aligned} -\nu\Delta\varphi_{\mathbf{g}} + \nabla\xi_{\mathbf{g}} &= \mathbf{g} \text{ dans } \Omega \\ \operatorname{div}\varphi_{\mathbf{g}} &= 0 \text{ dans } \Omega \\ \varphi_{\mathbf{g}} &= 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Si  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  est un domaine borné, polygonal convexe, alors on montre que la solution  $(\varphi_{\mathbf{g}}, \xi_{\mathbf{g}})$  de (2.5.20),(2.5.21) appartient à  $[H^2(\Omega)]^2 \cap [H_0^1(\Omega)]^2 \times (H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega))$  et

$$(2.5.22) \quad \|\varphi_{\mathbf{g}}\|_{[H^2(\Omega)]^2} + \|\xi_{\mathbf{g}}\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|\mathbf{g}\|_{[L^2(\Omega)]^2},$$

où  $C > 0$  est indépendante de  $\mathbf{g}$  et  $h$ .

Les hypothèses H1 et H2 impliquent

$$\begin{aligned} \inf_{\mathbf{v}_h \in X_h} \|\varphi_{\mathbf{g}} - \mathbf{v}_h\|_X + \inf_{q_h \in Y_h} \|\xi_{\mathbf{g}} - q_h\|_Y &\leq \max(C', C'')h (\|\varphi_{\mathbf{g}}\|_{[H^2(\Omega)]^2} + \|\xi_{\mathbf{g}}\|_{H^1(\Omega)}) \\ &\leq Ch\|\mathbf{g}\|_{[L^2(\Omega)]^2} \text{ d'après (2.5.22)}. \end{aligned}$$

En injectant cette estimation dans l'estimation du Lemme 2.2, on obtient

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{[L^2(\Omega)]^2} \leq Ch (\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{[H^1(\Omega)]^2} + \|p - p_h\|_{L^2(\Omega)})$$

et on conclut par l'estimation (2.5.18) du Théorème 2.2.  $\square$

*Démonstration du Lemme 2.2.* On a

$$(2.5.23) \quad \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{[L^2(\Omega)]^2} = \sup_{\mathbf{g} \in [L^2(\Omega)]^2} \frac{(\mathbf{g}, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h)_{L^2(\Omega)}}{\|\mathbf{g}\|_{[L^2(\Omega)]^2}}.$$

On prend alors  $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_h$  dans (2.5.20),(2.5.21) et on obtient

$$(2.5.24) \quad (\mathbf{g}, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h) = a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \varphi_{\mathbf{g}}) + b(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \xi_{\mathbf{g}}).$$

Puisque  $(\mathbf{u}, p)$  et  $(\mathbf{u}_h, p_h)$  vérifient (2.2.6),(2.2.7) et (2.4.11),(2.4.12) respectivement, on a

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p - p_h) &= 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in X_h \\ b(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, q_h) &= 0 \quad \forall q_h \in Y_h. \end{aligned}$$

De plus, on a  $b(\varphi_{\mathbf{g}}, p - p_h) = 0$ . En substituant les trois dernières relations dans la relation (2.5.24), on obtient

$$(\mathbf{g}, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h) = a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \varphi_{\mathbf{g}} - \mathbf{v}_h) + b(\varphi_{\mathbf{g}} - \mathbf{v}_h, p - p_h) + b(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \xi_{\mathbf{g}} - q_h).$$

Par la continuité de  $a$  et  $b$ , on obtient

$$\begin{aligned} (\mathbf{g}, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h) &\leq C(\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_X \|\varphi_{\mathbf{g}} - \mathbf{v}_h\|_X + \|\varphi_{\mathbf{g}} - \mathbf{v}_h\|_X \|p - p_h\|_Y \\ &\quad + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_X \|\xi_{\mathbf{g}} - q_h\|_Y), \end{aligned}$$

soit encore

$$(\mathbf{g}, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h) \leq C(\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_X + \|p - p_h\|_Y)(\|\varphi_{\mathbf{g}} - \mathbf{v}_h\|_X + \|\xi_{\mathbf{g}} - q_h\|_Y),$$

et ceci pour tout  $\mathbf{v}_h \in X_h$  et pour tout  $q_h \in Y_h$ . On conclut avec (2.5.23). Le Lemme 2.2 est ainsi démontré.  $\square$

Estimations d'erreurs pour les éléments  $\mathbb{P}_1$ -bulle/ $\mathbb{P}_1$  et  $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$ .

Pour les éléments finis  $\mathbb{P}_1$ -bulle/ $\mathbb{P}_1$  et  $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$  étudiés précédemment, on a le résultat suivant.

**PROPOSITION 2.9.** *Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un domaine borné, polygonal et convexe. On suppose que la triangulation  $\mathcal{T}_h$  est uniformément régulière. Si la solution  $(\mathbf{u}, p)$  du problème de Stokes (2.2.6), (2.2.7) appartient à  $[H^2(\Omega)]^2 \cap [H_0^1(\Omega)]^2 \times (H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega))$ , alors l'approximation  $(\mathbf{u}_h, p_h)$  de l'élément  $\mathbb{P}_1$ -bulle/ $\mathbb{P}_1$  vérifie*

$$(2.5.25) \quad \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{[L^2(\Omega)]^2} + h \left( \|\nabla(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\|_{[L^2(\Omega)]^2} + \|p - p_h\|_{L^2(\Omega)} \right) \\ \leq Ch^2 \left( \|\mathbf{u}\|_{[H^2(\Omega)]^2} + \|p\|_{H^1(\Omega)} \right),$$

où  $C > 0$  est indépendante de  $h$ .

Si de plus, la triangulation  $\mathcal{T}_h$  est telle qu'aucun triangle n'a deux côtés sur le bord  $\partial\Omega$ , alors l'approximation  $(\mathbf{u}_h, p_h)$  de l'élément  $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$  vérifie la même estimation (2.5.25).

*Démonstration.* On cherche à appliquer le Théorème 2.2. Il suffit de vérifier les hypothèses H1 et H2 puisque sous les hypothèses faites sur la triangulation, la condition 'inf-sup' discrète est vérifiée par les éléments  $\mathbb{P}_1$ -bulle/ $\mathbb{P}_1$  et  $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$ .

L'hypothèse H1 est vérifiée avec  $\Pi_h = I_h$  l'opérateur d'interpolation de Lagrange de la Proposition 2.3. L'hypothèse H2 est vérifiée avec  $S_h = R_h$  l'opérateur de projection  $R_h : H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega) \rightarrow Y_h$  défini, pour  $\mathbf{v} \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$ , par (cf. Proposition 2.4)

$$\int_{\Omega} \nabla(R_h \mathbf{v} - \mathbf{v}) \cdot \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in Y_h.$$

□



## Equations de Navier-Stokes

### 1. Introduction

Dans tout ce chapitre, on se limite à la dimension  $N = 2$ . Le domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  est borné et régulier. Soit  $T > 0$  fixé (le temps final). On rappelle la définition des espaces de fonctions à valeurs dans un espace de Banach  $X$ . Pour  $p \geq 1$ , on définit

$$L^p(0, T; X) = \left\{ v : [0, T] \rightarrow X; v \text{ est mesurable}^1 \text{ et } \int_0^T \|v(t)\|_X^p dt < +\infty \right\}.$$

Ces espaces sont munis de la norme

$$\|u\|_{L^p(0, T; X)} = \left( \int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{1/p}.$$

On pose  $X = [H_0^1(\Omega)]^2$  et  $Y = L_0^2(\Omega)$ . On introduit alors la formulation variationnelle mixte des équations de Navier-Stokes. Soit  $\mathbf{f} \in L^2(0, T; [L^2(\Omega)]^2)$  et  $\mathbf{u}_0 \in [L^2(\Omega)]^2$ .

$$\text{Trouver } \mathbf{u} \in W(0, T) = \left\{ \mathbf{v} \in L^2(0, T; X), \frac{d\mathbf{v}}{dt} \in L^2(0, T; X') \right\}, \\ p \in L^2(0, T; Y), \text{ tels que p.p. } t \in (0, T), \text{ on a :}$$

$$(3.1.1) \quad \left\langle \frac{d\mathbf{u}}{dt}(t), \mathbf{v} \right\rangle_{X', X} + a(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p(t)) = (\mathbf{f}(t), \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in X,$$

$$(3.1.2) \quad b(\mathbf{u}(t), q) = 0 \quad \forall q \in Y,$$

$$(3.1.3) \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0.$$

Dans la formulation précédente, on a noté  $c : X \times X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  la forme trilinéaire définie par

$$(3.1.4) \quad c(\mathbf{w}, \mathbf{z}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} [(\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{z}] \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} = \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} w_j \frac{\partial z_i}{\partial x_j} v_i d\mathbf{x}.$$

On remarquera que la formulation (3.1.1)–(3.1.3) a bien un sens. En particulier, si  $H$  est un espace de Hilbert tel que

$$X \hookrightarrow H \equiv H' \hookrightarrow X',$$

---

1. La fonction  $v$  est mesurable au sens de Bochner (fortement mesurable) c'est-à-dire qu'elle est limite presque partout d'une suite de fonctions *étagées* dans  $X$  : il existe  $v_k : [0, T] \rightarrow X$ , *étagées* telle que  $v_k(t) \rightarrow v(t)$  dans  $X$ , p.p.  $t \in [0, T]$ .

où les injections sont continues et compactes, alors on a

$$W(0, T) \hookrightarrow C^0([0, T]; H)$$

avec injection continue et par conséquent la condition initiale (3.1.3) i.e.  $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$  a bien un sens dans  $H = [L^2(\Omega)]^2$ .

**1.1. Quelques propriétés de la forme  $c$ .** • Par inégalité d'Hölder, on a

$$(3.1.5) \quad c(\mathbf{w}, \mathbf{z}, \mathbf{v}) \leq \|\mathbf{w}\|_{[L^4(\Omega)]^2} \|\nabla \mathbf{z}\|_{[L^2(\Omega)]^2} \|\mathbf{v}\|_{[L^4(\Omega)]^2} \quad \forall \mathbf{w}, \mathbf{z}, \mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^2$$

car  $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$  (vraie aussi pour  $N \leq 3$ ) et donc

$$(3.1.6) \quad c(\mathbf{w}, \mathbf{z}, \mathbf{v}) \leq C \|\mathbf{w}\|_{[H^1(\Omega)]^2} |\mathbf{z}|_{[H^1(\Omega)]^2} \|\mathbf{v}\|_{[H^1(\Omega)]^2} \quad \forall \mathbf{w}, \mathbf{z}, \mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^2$$

où  $|\cdot|_{H^1}$  désigne la semi-norme  $H^1$ .

• On rappelle l'inégalité d'interpolation suivante, valable seulement pour  $N = 2$  (voir [2]) :

$$(3.1.7) \quad \|v\|_{L^4(\Omega)} \leq C \|v\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

L'estimation (3.1.5) donne alors

$$(3.1.8) \quad c(\mathbf{w}, \mathbf{z}, \mathbf{v}) \leq C \|\mathbf{w}\|_{[L^2(\Omega)]^2}^{1/2} \|\mathbf{w}\|_{[H^1(\Omega)]^2}^{1/2} |\mathbf{z}|_{[H^1(\Omega)]^2} \|\mathbf{v}\|_{[L^2(\Omega)]^2}^{1/2} |\mathbf{v}|_{[H^1(\Omega)]^2}^{1/2} \\ \forall \mathbf{w}, \mathbf{z}, \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^2.$$

• Pour tout  $\mathbf{w}, \mathbf{z}, \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^2$ , on a

$$\begin{aligned} c(\mathbf{w}, \mathbf{z}, \mathbf{v}) &= \sum_{i,j} \int_{\Omega} w_j \frac{\partial z_i}{\partial x_j} v_i \, d\mathbf{x} \\ &= - \sum_{i,j} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} (w_j v_i) z_i \, d\mathbf{x} \quad \text{par intégration par parties} \\ &= - \sum_{i,j} \int_{\Omega} w_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} z_i \, d\mathbf{x} - \sum_{i,j} \int_{\Omega} \frac{\partial w_j}{\partial x_j} v_i z_i \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$(3.1.9) \quad c(\mathbf{w}, \mathbf{z}, \mathbf{v}) = -c(\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{z}) - \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{z}) \operatorname{div} \mathbf{w} \, d\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{w}, \mathbf{z}, \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^2.$$

• Soit  $X = [H_0^1(\Omega)]^2$  et  $V = \{\mathbf{v} \in X \mid \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \text{ p.p. dans } \Omega\}$ . On déduit de (3.1.9) les relations suivantes :

$$(3.1.10) \quad c(\mathbf{w}, \mathbf{z}, \mathbf{z}) = 0 \quad \forall \mathbf{w} \in V, \quad \forall \mathbf{z} \in X,$$

$$(3.1.11) \quad c(\mathbf{w}, \mathbf{z}, \mathbf{v}) = -c(\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{z}) \quad \forall \mathbf{w} \in V, \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{z} \in X.$$



**1.2. Quelques rappels utiles.** • *Inégalité de Young.* Pour tout  $a, b \in \mathbb{R}$ ,

$$(3.1.12) \quad ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon} b^2, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

• *Lemme de Gronwall.* Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $t_0 \in I$ . On considère une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  positive et intégrable sur  $I$  ainsi que  $\phi$  et  $g$  deux fonctions positives et continues sur  $I$ . Si  $g$  est croissante et si

$$\phi(t) \leq g(t) + \int_{t_0}^t f(s)\phi(s) ds \quad \forall t \in I,$$

alors

$$(3.1.13) \quad \phi(t) \leq g(t) \exp\left(\int_{t_0}^t f(s) ds\right) \quad \forall t \in I.$$

• *Lemme de Gronwall discret.* Soient  $\rho > 0$  et deux suites  $\{a_n\}_{n \geq 0}$ ,  $\{b_n\}_{n \geq 0}$  positives telles que

$$a_0 \leq \rho \quad \text{et} \quad a_n \leq \rho + \sum_{j=0}^{n-1} a_j b_j, \quad \forall n \geq 1.$$

Alors

$$(3.1.14) \quad a_n \leq \rho \exp\left(\sum_{j=0}^{n-1} b_j\right), \quad \forall n \geq 1.$$

**1.3. Une estimation d'énergie.** On prend  $\mathbf{v} = \mathbf{u}(t) \in X$  dans l'équation de Navier-Stokes (3.1.1). On peut montrer (voir [14]) que

$$\left\langle \frac{d\mathbf{u}}{dt}, \mathbf{u} \right\rangle_{X', X} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\mathbf{u}, \mathbf{u}).$$

On obtient ainsi en tenant compte de (3.1.2),

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}(t)\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + \nu \|\nabla \mathbf{u}(t)\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + c(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{u}) = (\mathbf{f}(t), \mathbf{u}(t)).$$

Or d'après la relation (3.1.10), on a  $c(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$  car  $\mathbf{u}(t) \in V$  et donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}(t)\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + \nu \|\nabla \mathbf{u}(t)\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 &\leq \|\mathbf{f}(t)\|_{[L^2(\Omega)]^2} \|\mathbf{u}(t)\|_{[L^2(\Omega)]^2} \\ &\leq \frac{1}{2} \|\mathbf{f}(t)\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{u}(t)\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2. \end{aligned}$$

En intégrant entre 0 et  $t$ , on obtient

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}(t)\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + 2\nu \int_0^t \|\nabla \mathbf{u}(s)\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 ds &\leq \|\mathbf{u}(0)\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + \int_0^t \|\mathbf{f}(s)\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 ds \\ &\quad + \int_0^t \|\mathbf{u}(s)\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 ds. \end{aligned}$$

On conclut par le Lemme de Gronwall (voir (3.1.13)) que, pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$(3.1.15) \quad \|\mathbf{u}(t)\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + 2\nu \int_0^t \|\nabla \mathbf{u}(s)\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 ds \\ \leq \left( \|\mathbf{u}(0)\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + \int_0^t \|\mathbf{f}(s)\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 ds \right) \exp(t).$$

## 2. Discrétisation complète de la formulation mixte de Navier-Stokes

Le domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  est supposé polygonal et convexe. On désigne par  $X_h \subset X$  et  $Y_h \subset Y$  des sous-espaces de dimension finie. On présente dans cette section deux schémas semi-implicites en temps et on va étudier leur stabilité et leur convergence.

Pour des raisons de stabilité qui apparaîtront plus loin dans l'analyse, on introduit à la place du terme nonlinéaire  $c$ , le terme modifié  $\tilde{c}$  défini par :

$$(3.2.1) \quad \tilde{c}(\mathbf{w}, \mathbf{z}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2} [c(\mathbf{w}, \mathbf{z}, \mathbf{v}) - c(\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{z})].$$

Ce terme est anti-symétrique :

$$(3.2.2) \quad \tilde{c}(\mathbf{w}, \mathbf{z}, \mathbf{v}) = -\tilde{c}(\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{z}) \quad \forall \mathbf{w}, \mathbf{z}, \mathbf{v} \in X$$

et par conséquent il possède la propriété importante suivante :

$$(3.2.3) \quad \tilde{c}(\mathbf{w}, \mathbf{z}, \mathbf{z}) = 0 \quad \forall \mathbf{w}, \mathbf{z} \in X.$$

En tenant compte de la relation (3.1.9), on a

$$(3.2.4) \quad \tilde{c}(\mathbf{w}, \mathbf{z}, \mathbf{v}) = c(\mathbf{w}, \mathbf{z}, \mathbf{v}) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{z}) \operatorname{div} \mathbf{w} \, dx \quad \forall \mathbf{w}, \mathbf{z}, \mathbf{v} \in X.$$

En particulier,

$$(3.2.5) \quad \tilde{c}(\mathbf{w}, \mathbf{z}, \mathbf{v}) = c(\mathbf{w}, \mathbf{z}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{w} \in V \quad \forall \mathbf{z}, \mathbf{v} \in X.$$

On note  $\Delta t > 0$  le pas de discrétisation en temps avec  $\Delta t = T/n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  et on considère l'approximation  $\mathbf{u}_h^k(\mathbf{x}) \in X_h$  de  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t^k)$  avec  $t^k = k\Delta t$ ,  $k \geq 0$  et  $p_h^k(\mathbf{x}) \in Y_h$  l'approximation de  $p(\mathbf{x}, t^k)$ . Enfin, on suppose pour simplifier que  $\mathbf{f}$  ne dépend pas du temps.

### 2.1. Schéma semi-implicite (I).

Soit  $\mathbf{u}_h^0 \in X_h$  donné. On cherche  $(\mathbf{u}_h^k, p_h^k)$ ,  $k = 1, \dots, n$  tels que

$$(3.2.6) \quad \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{u}_h^k - \mathbf{u}_h^{k-1}, \mathbf{v}_h) + a(\mathbf{u}_h^k, \mathbf{v}_h) + \tilde{c}(\mathbf{u}_h^{k-1}, \mathbf{u}_h^{k-1}, \mathbf{v}_h) \\ + b(\mathbf{v}_h, p_h^k) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in X_h,$$

$$(3.2.7) \quad b(\mathbf{u}_h^k, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in Y_h.$$

On suppose que la condition 'inf-sup' discrète (2.4.13) est vérifiée par les espaces  $X_h$  et  $Y_h$ . Alors, pour  $\mathbf{u}_h^{k-1} \in X_h$  donné, le problème (3.2.6),(3.2.7) admet une unique solution  $(\mathbf{u}_h^k, p_h^k) \in X_h \times Y_h$ .

Stabilité. L'introduction de la forme modifiée  $\tilde{c}$  permet d'obtenir un schéma stable. Ce résultat est établi dans la proposition suivante.

PROPOSITION 3.1. *On suppose que la triangulation  $\mathcal{T}_h$  est uniformément régulière et que la donnée initiale  $\mathbf{u}_h^0$  est telle que  $\|\mathbf{u}_h^0\|_{[H^1(\Omega)]^2}$  est bornée indépendamment de  $h$  et  $\Delta t$ . Il existe une constante  $C^* > 0$  indépendante de  $h$  et  $\Delta t$  telle que si  $\Delta t \leq C^* h^2$  alors le schéma semi-implicite (3.2.6),(3.2.7) est stable, c'est-à-dire qu'il existe  $C > 0$  indépendante de  $h$  et  $\Delta t$  telle que*

$$(3.2.8) \quad \|\mathbf{u}_h^m\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + \Delta t \sum_{k=1}^m \|\nabla \mathbf{u}_h^k\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 \leq C \quad \text{pour } m = 1, \dots, n.$$

Les constantes  $C$  et  $C^*$  dépendent de  $\|\mathbf{u}_h^0\|_{[H^1(\Omega)]^2}$ ,  $\|\mathbf{f}\|_{[L^2(\Omega)]^2}$  et  $\nu$ .

*Démonstration.* On notera les normes  $\|\cdot\|_0 = \|\cdot\|_{[L^2(\Omega)]^2}$  et  $\|\cdot\|_1 = \|\cdot\|_{[H^1(\Omega)]^2}$ . Dans tout ce qui suit, on notera  $C$  une constante *générique* (i.e. lorsque une nouvelle constante apparaît, on la note toujours  $C$ ) qui ne dépend ni de  $h$  ni de  $\Delta t$ . On prend  $\mathbf{v}_h = \mathbf{u}_h^k$  dans (3.2.6) et on utilise l'identité

$$2(\mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u}) = \|\mathbf{u}\|_0^2 - \|\mathbf{v}\|_0^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_0^2 \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in [L^2(\Omega)]^2.$$

Il vient alors

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_h^k\|_0^2 - \|\mathbf{u}_h^{k-1}\|_0^2 + \|\mathbf{u}_h^k - \mathbf{u}_h^{k-1}\|_0^2 + 2\nu\Delta t \|\nabla \mathbf{u}_h^k\|_0^2 \\ = -2\Delta t \tilde{c}(\mathbf{u}_h^{k-1}, \mathbf{u}_h^{k-1}, \mathbf{u}_h^k) + 2\Delta t (\mathbf{f}, \mathbf{u}_h^k). \end{aligned}$$

Or, d'après (3.2.3), on a

$$(3.2.9) \quad \tilde{c}(\mathbf{u}_h^{k-1}, \mathbf{u}_h^{k-1}, \mathbf{u}_h^k) = \tilde{c}(\mathbf{u}_h^{k-1}, \mathbf{u}_h^{k-1}, \mathbf{u}_h^k - \mathbf{u}_h^{k-1}).$$

Il est important de remarquer que c'est avec la relation précédente qu'intervient de façon essentielle la forme modifiée  $\tilde{c}$ . En fait, la relation (3.2.9) n'est pas vraie avec  $c$  car en général  $\mathbf{u}_h^k \notin V$  et on ne peut pas utiliser la relation (3.1.10) sur  $c$ .

D'après (3.1.8), on a

$$(3.2.10) \quad c(\mathbf{w}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) \leq C \|\mathbf{w}\|_0^{1/2} \|\mathbf{w}\|_1^{3/2} \|\mathbf{v}\|_0^{1/2} \|\mathbf{v}\|_1^{1/2} \quad \forall \mathbf{w}, \mathbf{v} \in X$$

et d'autre part, d'après la relation (3.2.4), on a

$$(3.2.11) \quad \tilde{c}(\mathbf{w}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) = c(\mathbf{w}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) \operatorname{div} \mathbf{w} \, d\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{w}, \mathbf{v} \in X.$$

Par l'inégalité d'Hölder et en utilisant l'inégalité d'interpolation (3.1.7), on a, pour tout  $\mathbf{w}, \mathbf{v} \in X$ ,

$$(3.2.12) \quad \begin{aligned} \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) \operatorname{div} \mathbf{w} \, d\mathbf{x} &\leq \|\mathbf{v}\|_{[L^4(\Omega)]^2} \|\mathbf{w}\|_{[L^4(\Omega)]^2} \|\mathbf{w}\|_{[H^1(\Omega)]^2} \\ &\leq C \|\mathbf{v}\|_0^{1/2} \|\mathbf{v}\|_1^{1/2} \|\mathbf{w}\|_0^{1/2} \|\mathbf{w}\|_1^{3/2}. \end{aligned}$$

En combinant les estimations (3.2.10),(3.2.12) avec la relation (3.2.11), on obtient

$$(3.2.13) \quad \tilde{c}(\mathbf{w}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) \leq C \|\mathbf{w}\|_0^{1/2} \|\mathbf{w}\|_1^{3/2} \|\mathbf{v}\|_0^{1/2} \|\mathbf{v}\|_1^{1/2} \quad \forall \mathbf{w}, \mathbf{v} \in X.$$

On a alors

$$\tilde{c}(\mathbf{u}_h^{k-1}, \mathbf{u}_h^{k-1}, \mathbf{u}_h^k - \mathbf{u}_h^{k-1}) \leq C \|\mathbf{u}_h^{k-1}\|_0^{1/2} \|\mathbf{u}_h^{k-1}\|_1^{3/2} \|\mathbf{u}_h^k - \mathbf{u}_h^{k-1}\|_0^{1/2} \|\mathbf{u}_h^k - \mathbf{u}_h^{k-1}\|_1^{1/2}.$$

La triangulation étant uniformément régulière, on a les inégalités inverses suivantes (cf. Proposition 2.2)

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}_h^{k-1}\|_1^{1/2} &\leq Ch^{-1/2}\|\mathbf{u}_h^{k-1}\|_0^{1/2}, \\ \|\mathbf{u}_h^k - \mathbf{u}_h^{k-1}\|_1^{1/2} &\leq Ch^{-1/2}\|\mathbf{u}_h^k - \mathbf{u}_h^{k-1}\|_0^{1/2}.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\tilde{c}(\mathbf{u}_h^{k-1}, \mathbf{u}_h^{k-1}, \mathbf{u}_h^k - \mathbf{u}_h^{k-1}) \leq \frac{C}{h}\|\mathbf{u}_h^{k-1}\|_0\|\mathbf{u}_h^{k-1}\|_1\|\mathbf{u}_h^k - \mathbf{u}_h^{k-1}\|_0.$$

On obtient ainsi,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}_h^k\|_0^2 - \|\mathbf{u}_h^{k-1}\|_0^2 + \|\mathbf{u}_h^k - \mathbf{u}_h^{k-1}\|_0^2 + 2\nu\Delta t\|\nabla\mathbf{u}_h^k\|_0^2 \\ \leq C\frac{\Delta t}{h}\|\mathbf{u}_h^{k-1}\|_0\|\mathbf{u}_h^{k-1}\|_1\|\mathbf{u}_h^k - \mathbf{u}_h^{k-1}\|_0 + 2\Delta t\|\mathbf{f}\|_0\|\mathbf{u}_h^k\|_0 \\ \leq C\frac{\Delta t}{h}\|\mathbf{u}_h^{k-1}\|_0\|\mathbf{u}_h^{k-1}\|_1\|\mathbf{u}_h^k - \mathbf{u}_h^{k-1}\|_0 + C\Delta t\|\mathbf{f}\|_0\|\nabla\mathbf{u}_h^k\|_0 \quad (\text{inégalité de Poincaré}) \\ \leq \frac{1}{2}\|\mathbf{u}_h^k - \mathbf{u}_h^{k-1}\|_0^2 + C\left(\frac{\Delta t}{h}\right)^2\|\mathbf{u}_h^{k-1}\|_0^2\|\mathbf{u}_h^{k-1}\|_1^2 \\ + \nu\Delta t\|\nabla\mathbf{u}_h^k\|_0^2 + C\frac{\Delta t}{\nu}\|\mathbf{f}\|_0^2, \quad (\text{inégalité de Young})\end{aligned}$$

d'où

$$(3.2.14) \quad \|\mathbf{u}_h^k\|_0^2 - \|\mathbf{u}_h^{k-1}\|_0^2 + \nu\Delta t\|\nabla\mathbf{u}_h^k\|_0^2 \leq C\left(\frac{\Delta t}{h}\right)^2\|\mathbf{u}_h^{k-1}\|_0^2\|\mathbf{u}_h^{k-1}\|_1^2 + C\frac{\Delta t}{\nu}\|\mathbf{f}\|_0^2.$$

On somme sur  $k = 1, \dots, m$  avec  $1 \leq m \leq n$  et il vient

$$\|\mathbf{u}_h^m\|_0^2 + \nu\Delta t\sum_{k=1}^m\|\nabla\mathbf{u}_h^k\|_0^2 \leq \|\mathbf{u}_h^0\|_0^2 + C\left(\frac{\Delta t}{h}\right)^2\sum_{k=1}^m\|\mathbf{u}_h^{k-1}\|_0^2\|\mathbf{u}_h^{k-1}\|_1^2 + C\frac{T}{\nu}\|\mathbf{f}\|_0^2,$$

soit encore

$$(3.2.15) \quad \|\mathbf{u}_h^m\|_0^2 + \nu\Delta t\sum_{k=1}^m\|\nabla\mathbf{u}_h^k\|_0^2 \leq C\left(\frac{\Delta t}{h}\right)^2\sum_{k=1}^{m-1}\|\mathbf{u}_h^k\|_0^2\|\mathbf{u}_h^k\|_1^2 + \lambda_0,$$

avec

$$(3.2.16) \quad \lambda_0 = \|\mathbf{u}_h^0\|_0^2 + C_0\left[\left(\frac{\Delta t}{h}\right)^2\|\mathbf{u}_h^0\|_0^2\|\mathbf{u}_h^0\|_1^2 + \frac{T}{\nu}\|\mathbf{f}\|_0^2\right],$$

où  $C_0 > 0$  est indépendante de  $h$  et  $\Delta t$ .

Montrons par récurrence sur  $m$  que,

$$(3.2.17) \quad \mathcal{A}_m := \|\mathbf{u}_h^m\|_0^2 + \delta\Delta t\sum_{k=1}^m\|\nabla\mathbf{u}_h^k\|_0^2 \leq \lambda_0, \quad \forall m \geq 1,$$

avec  $\delta > 0$  indépendant de  $m$ ,  $\Delta t$ ,  $h$  ( $\delta$  sera choisi suffisamment petit).

- Pour  $m = 1$ , on a  $\mathcal{A}_1 \leq \lambda_0$  avec  $\delta \leq \nu$  d'après l'estimation (3.2.14) avec  $k = 1$ .
- Supposons que l'estimation (3.2.17) soit vraie jusqu'au rang  $(m - 1)$  et on veut l'établir pour  $m$ . Par hypothèse, on a

$$\|\mathbf{u}_h^k\|_0^2 \leq \lambda_0 \quad \text{pour } k = 1, \dots, m - 1.$$

D'après (3.2.15), on a

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_h^m\|_0^2 + \nu \Delta t \sum_{k=1}^m \|\nabla \mathbf{u}_h^k\|_0^2 &\leq C \left( \frac{\Delta t}{h} \right)^2 \lambda_0^2 \sum_{k=1}^{m-1} \|\mathbf{u}_h^k\|_1^2 + \lambda_0 \\ &\leq C_1 \left( \frac{\Delta t}{h} \right)^2 \lambda_0^2 \sum_{k=1}^{m-1} \|\nabla \mathbf{u}_h^k\|_0^2 + \lambda_0 \quad (\text{inégalité de Poincaré}), \end{aligned}$$

où  $C_1 > 0$  est indépendante de  $h$  et  $\Delta t$ . On obtient donc

$$\|\mathbf{u}_h^m\|_0^2 + \left( \nu - C_1 \frac{\Delta t}{h^2} \lambda_0^2 \right) \Delta t \sum_{k=1}^m \|\nabla \mathbf{u}_h^k\|_0^2 \leq \lambda_0.$$

Il suffit de choisir le rapport  $\Delta t/h^2$  tel que

$$\nu - C_1 \frac{\Delta t}{h^2} \lambda_0^2 \geq \delta > 0 \quad \text{et} \quad \lambda_0 \leq C'$$

avec  $C'$  indépendante de  $h$  et  $\Delta t$ . Pour  $\delta$  fixé,  $0 < \delta < \nu$ , on choisit

$$\frac{\Delta t}{h^2} \leq C^* := \min \left( 1, \frac{\nu - \delta}{C_1 (C')^2} \right)$$

avec  $C' = \|\mathbf{u}_h^0\|_0^2 + C_0 \left[ T \|\mathbf{u}_h^0\|_0^2 \|\mathbf{u}_h^0\|_1^2 + \frac{T}{\nu} \|\mathbf{f}\|_0^2 \right]$  (voir la relation (3.2.16) qui définit  $\lambda_0$ ).  $\square$

*Remarques et commentaires.*

- L'introduction du terme  $\tilde{c}$  à la place de  $c$  revient à considérer le terme supplémentaire  $\frac{1}{2} \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{u}$  dans l'équation de Navier-Stokes. En fait le schéma (I) correspond au schéma semi-discrétisé en temps suivant : pour  $\mathbf{u}^0$  donné et pour  $k \geq 1$ , on calcule  $\mathbf{u}^k$  et  $p^k$  par

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1}}{\Delta t} - \nu \Delta \mathbf{u}^k + (\mathbf{u}^{k-1} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{k-1} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^{k-1} \operatorname{div} \mathbf{u}^{k-1} + \nabla p^k &= \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}^k &= 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u}^k &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$

- Le schéma (I) est stable sous la condition que le rapport  $\Delta t/h^2$  soit suffisamment petit. Cela vient du fait que le terme nonlinéaire des équations de Navier-Stokes c'est-à-dire le terme  $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ , est discrétisé en temps de façon explicite.
- On peut montrer que, sous les hypothèses de la Proposition 3.1, le schéma (I) est convergent. On le montrera pour le schéma (II) suivant qui est un peu plus implicite que celui présenté dans cette section.

## 2.2. Schéma semi-implicite (II).

Soit  $\mathbf{u}_h^0 \in X_h$  donné. On cherche  $(\mathbf{u}_h^k, p_h^k)$ ,  $k = 1, \dots, n$  tels que

$$(3.2.18) \quad \begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{u}_h^k - \mathbf{u}_h^{k-1}, \mathbf{v}_h) + a(\mathbf{u}_h^k, \mathbf{v}_h) + \tilde{c}(\mathbf{u}_h^{k-1}, \mathbf{u}_h^k, \mathbf{v}_h) \\ + b(\mathbf{v}_h, p_h^k) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in X_h, \end{aligned}$$

$$(3.2.19) \quad b(\mathbf{u}_h^k, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in Y_h.$$

On suppose que la condition 'inf-sup' discrète (2.4.13) est vérifiée par les espaces  $X_h$  et  $Y_h$ . Alors, pour  $\mathbf{u}_h^{k-1} \in X_h$  donné, le problème (3.2.18),(3.2.19) admet une unique solution  $(\mathbf{u}_h^k, p_h^k) \in X_h \times Y_h$ . En effet, la forme bilinéaire  $\tilde{a} : (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \frac{1}{\Delta t}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \tilde{c}(\mathbf{u}_h^{k-1}, \mathbf{u}, \mathbf{v})$  est continue et coercive sur  $X \times X$  car  $\tilde{a}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \frac{1}{\Delta t}\|\mathbf{u}\|_0^2 + a(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ .

*Stabilité.* On montre le résultat de stabilité suivant.

**PROPOSITION 3.2.** *Le schéma semi-implicite (3.2.18),(3.2.19) est inconditionnellement stable, c'est-à-dire que si la donnée initiale  $\mathbf{u}_h^0$  est telle que  $\|\mathbf{u}_h^0\|_{[H^1(\Omega)]^2}$  soit bornée indépendamment de  $h$  et  $\Delta t$ , alors il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $h$  et  $\Delta t$  telle que*

$$(3.2.20) \quad \|\mathbf{u}_h^m\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + \nu \Delta t \sum_{k=1}^m \|\nabla \mathbf{u}_h^k\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 \leq C \quad \text{pour } m = 1, \dots, n.$$

*Démonstration.* On prend  $\mathbf{v}_h = \mathbf{u}_h^k$  dans (3.2.18) et on obtient

$$\|\mathbf{u}_h^k\|_0^2 - \|\mathbf{u}_h^{k-1}\|_0^2 + \|\mathbf{u}_h^k - \mathbf{u}_h^{k-1}\|_0^2 + 2\nu \Delta t \|\nabla \mathbf{u}_h^k\|_0^2 = -2\Delta t \tilde{c}(\mathbf{u}_h^{k-1}, \mathbf{u}_h^k, \mathbf{u}_h^k) + 2\Delta t (\mathbf{f}, \mathbf{u}_h^k).$$

Or, d'après (3.2.3),  $\tilde{c}(\mathbf{u}_h^{k-1}, \mathbf{u}_h^k, \mathbf{u}_h^k) = 0$  et donc

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_h^k\|_0^2 - \|\mathbf{u}_h^{k-1}\|_0^2 + 2\nu \Delta t \|\nabla \mathbf{u}_h^k\|_0^2 &\leq 2\Delta t \|\mathbf{f}\|_0 \|\mathbf{u}_h^k\|_0 \\ &\leq C \Delta t \|\mathbf{f}\|_0 \|\nabla \mathbf{u}_h^k\|_0 \quad (\text{inégalité de Poincaré}) \\ &\leq \nu \Delta t \|\nabla \mathbf{u}_h^k\|_0^2 + C \frac{\Delta t}{\nu} \|\mathbf{f}\|_0^2 \quad (\text{inégalité de Young}). \end{aligned}$$

En sommant sur  $k = 1, \dots, m$ , on obtient

$$\|\mathbf{u}_h^m\|_0^2 + \nu \Delta t \sum_{k=1}^m \|\nabla \mathbf{u}_h^k\|_0^2 \leq \|\mathbf{u}_h^0\|_0^2 + C \frac{T}{\nu} \|\mathbf{f}\|_0^2.$$

□

*Convergence.* Pour établir la convergence du schéma semi-implicite (II), on a besoin d'un résultat préliminaire.

**LEMME 3.1.** *On suppose que les espaces  $X_h$  et  $Y_h$  vérifient les hypothèses d'approximations (H1) et (H2) (cf. Section 5.2) et que la condition 'inf-sup' discrète (2.4.13) est vérifiée. Soit  $(\mathbf{u}, p) \in X \times Y$ . Alors il existe un unique couple  $(\Pi_h^1 \mathbf{u}, \Pi_h^2 p) \in X_h \times Y_h$  tel que*

$$(3.2.21) \quad a(\mathbf{u} - \Pi_h^1 \mathbf{u}, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p - \Pi_h^2 p) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in X_h$$

$$(3.2.22) \quad b(\mathbf{u} - \Pi_h^1 \mathbf{u}, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in Y_h.$$

*Si de plus  $(\mathbf{u}, p) \in [H^2(\Omega)]^2 \times H^1(\Omega)$ , alors il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $h$  telle que*

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \Pi_h^1 \mathbf{u}\|_X + \|p - \Pi_h^2 p\|_Y &\leq Ch \left( \|\mathbf{u}\|_{[H^2(\Omega)]^2} + \|p\|_{H^1(\Omega)} \right) \\ \|\mathbf{u} - \Pi_h^1 \mathbf{u}\|_{[L^2(\Omega)]^2} &\leq Ch^2 \left( \|\mathbf{u}\|_{[H^2(\Omega)]^2} + \|p\|_{H^1(\Omega)} \right). \end{aligned}$$

*Démonstration.* La démonstration est identique à celle du Théorème 2.2 relatif aux estimations  $H^1$  et  $L^2$  pour le problème de Stokes.  $\square$

On va pouvoir établir le résultat de convergence pour le schéma semi-implicite (II).

PROPOSITION 3.3. *On suppose que la solution exacte  $(\mathbf{u}, p)$  des équations de Navier-Stokes (3.1.1)–(3.1.3) est régulière :*

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &\in C^0([0, T]; [W^{1,\infty}(\Omega)]^2 \cap X) \cap C^1([0, T]; [H^2(\Omega)]^2) \cap H^2(0, T; [L^2(\Omega)]^2), \\ p &\in H^1(0, T; H^1(\Omega) \cap Y). \end{aligned}$$

Il existe une constante  $C^* > 0$  indépendante de  $h$ ,  $\Delta t$  et  $\nu$  telle que si  $\Delta t \leq C^* \nu$  et  $h \leq C^* \nu$  alors on a

$$\|\mathbf{u}_h^k - \mathbf{u}(t^k)\|_0 \leq C (\|\mathbf{u}_h^0 - \mathbf{u}(0)\|_1 + h^2 + \Delta t), \quad \forall k \geq 1,$$

où  $C > 0$  est indépendante de  $h$  et  $\Delta t$ .

*Démonstration.* On note

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1^k &= \mathbf{u}_h^k - \Pi_h^1 \mathbf{u}(t^k), & \eta_1^k &= \Pi_h^1 \mathbf{u}(t^k) - \mathbf{u}(t^k), \\ \mathbf{w}_2^k &= p_h^k - \Pi_h^2 p(t^k), & \eta_2^k &= \Pi_h^2 p(t^k) - p(t^k). \end{aligned}$$

Il suffit d'établir les estimations pour  $\mathbf{w}_1^k$  puisque  $\eta_1^k$  est estimé directement par le Lemme 3.1. On a

$$\begin{aligned} &(\mathbf{w}_1^k - \mathbf{w}_1^{k-1}, \mathbf{v}_h) + \Delta t a(\mathbf{w}_1^k, \mathbf{v}_h) + \Delta t b(\mathbf{v}_h, \mathbf{w}_2^k) \\ &= (\mathbf{u}_h^k - \mathbf{u}_h^{k-1}, \mathbf{v}_h) - (\Pi_h^1 \mathbf{u}(t^k) - \Pi_h^1 \mathbf{u}(t^{k-1}), \mathbf{v}_h) + \Delta t a(\mathbf{u}_h^k, \mathbf{v}_h) \\ &\quad - \Delta t a(\Pi_h^1 \mathbf{u}(t^k), \mathbf{v}_h) + \Delta t b(\mathbf{v}_h, p_h^k) - \Delta t b(\mathbf{v}_h, \Pi_h^2 p(t^k)) \\ &= \Delta t (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h) - \Delta t \tilde{c}(\mathbf{u}_h^{k-1}, \mathbf{u}_h^k, \mathbf{v}_h) - (\Pi_h^1 \mathbf{u}(t^k) - \Pi_h^1 \mathbf{u}(t^{k-1}), \mathbf{v}_h) \\ &\quad - \Delta t a(\Pi_h^1 \mathbf{u}(t^k), \mathbf{v}_h^k) - \Delta t b(\mathbf{v}_h, \Pi_h^2 p(t^k)) \\ &= \Delta t (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h) - \Delta t \tilde{c}(\mathbf{u}_h^{k-1}, \mathbf{u}_h^k, \mathbf{v}_h) - (\Pi_h^1 \mathbf{u}(t^k) - \mathbf{u}(t^k), \mathbf{v}_h) \\ &\quad - (\mathbf{u}(t^k) - \mathbf{u}(t^{k-1}), \mathbf{v}_h) + (\Pi_h^1 \mathbf{u}(t^{k-1}) - \mathbf{u}(t^{k-1}), \mathbf{v}_h) \\ &\quad - \Delta t a(\mathbf{u}(t^k), \mathbf{v}_h) - \Delta t b(\mathbf{v}_h, p(t^k)) \\ &= -(\eta_1^k - \eta_1^{k-1}, \mathbf{v}_h) + \Delta t [c(\mathbf{u}(t^k), \mathbf{u}(t^k), \mathbf{v}_h) - \tilde{c}(\mathbf{u}^{k-1}, \mathbf{u}^k, \mathbf{v}_h)] \\ &\quad + (\Delta t \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(t^k) - (\mathbf{u}(t^k) - \mathbf{u}(t^{k-1})), \mathbf{v}_h). \end{aligned}$$

Or  $c(\mathbf{u}(t^k), \mathbf{u}(t^k), \mathbf{v}_h) = \tilde{c}(\mathbf{u}(t^k), \mathbf{u}(t^k), \mathbf{v}_h)$  car  $\operatorname{div} \mathbf{u}(t^k) = 0$  dans  $\Omega$ . En prenant  $\mathbf{v}_h = \mathbf{w}_1^k$ , on obtient

$$\begin{aligned} (3.2.23) \quad &\|\mathbf{w}_1^k\|_0^2 - \|\mathbf{w}_1^{k-1}\|_0^2 + \|\mathbf{w}_1^k - \mathbf{w}_1^{k-1}\|_0^2 + \nu \Delta t |\mathbf{w}_1^k|_1^2 + \Delta t b(\mathbf{w}_1^k, \mathbf{w}_2^k) \\ &\leq \left( \|\eta_1^k - \eta_1^{k-1}\|_0 + \left\| \Delta t \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(t^k) - (\mathbf{u}(t^k) - \mathbf{u}(t^{k-1})) \right\|_0 \right) \|\mathbf{w}_1^k\|_0 \\ &\quad + \Delta t [\tilde{c}(\mathbf{u}(t^k), \mathbf{u}(t^k), \mathbf{w}_1^k) - \tilde{c}(\mathbf{u}_h^{k-1}, \mathbf{u}_h^k, \mathbf{w}_1^k)]. \end{aligned}$$

Or  $b(\mathbf{w}_1^k, \mathbf{w}_2^k) = b(\mathbf{u}_h^k, \mathbf{w}_2^k) - b(\Pi_h^1 \mathbf{u}(t^k), \mathbf{w}_2^k)$ . Mais,  $b(\mathbf{u}_h^k, \mathbf{w}_2^k) = 0$  car  $\mathbf{w}_2^k \in Y_h$  et  $b(\Pi_h^1 \mathbf{u}(t^k), \mathbf{w}_2^k) = b(\mathbf{u}(t^k), \mathbf{w}_2^k) = 0$ . Donc

$$(3.2.24) \quad b(\mathbf{w}_1^k, \mathbf{w}_2^k) = 0.$$

i) *Estimation de*  $\|\eta_1^k - \eta_1^{k-1}\|_0$ .

Soit  $\eta_1(t) = \Pi_h^1 \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(t)$ . On peut montrer que si  $\mathbf{u} \in H^1(0, T; X)$  et  $p \in H^1(0, T; Y)$  alors  $\Pi_h^1 \mathbf{u} \in H^1(0, T; X_h)$ ,  $\Pi_h^2 p \in H^1(0, T; Y_h)$  et pour presque tout  $t \in (0, T)$ , on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Pi_h^1 \mathbf{u}(t) &= \Pi_h^1 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(t), \\ \frac{\partial}{\partial t} \Pi_h^2 p(t) &= \Pi_h^2 \frac{\partial p}{\partial t}(t). \end{aligned}$$

En effet, il suffit de dériver (3.2.21), (3.2.22) par rapport à  $t$  et les relations précédentes proviennent de l'unicité du couple  $(\Pi_h^1 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \Pi_h^2 \frac{\partial p}{\partial t})$ . De plus, si  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(t) \in [H^2(\Omega)]^2$  et  $\frac{\partial p}{\partial t}(t) \in H^1(\Omega)$  p.p.  $t$ , alors d'après le Lemme 3.1, on a

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{u} - \Pi_h^1 \mathbf{u}) \right\|_{[L^2(\Omega)]^2} \leq Ch^2 \left( \left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(t) \right\|_{[H^2(\Omega)]^2} + \left\| \frac{\partial p}{\partial t}(t) \right\|_{H^1(\Omega)} \right).$$

Par ailleurs, on a  $\eta_1^k - \eta_1^{k-1} = \int_{t^{k-1}}^{t^k} \frac{\partial \eta_1}{\partial t}(t) dt$  et donc

$$\|\eta_1^k - \eta_1^{k-1}\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 = \int_{\Omega} \left| \int_{t^{k-1}}^{t^k} \frac{\partial}{\partial t} (\Pi_h^1 \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(t)) dt \right|^2 dx.$$

Par inégalité d'Hölder, il vient

$$\begin{aligned} \|\eta_1^k - \eta_1^{k-1}\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 &\leq \Delta t \int_{t^{k-1}}^{t^k} \left\| \frac{\partial}{\partial t} (\Pi_h^1 \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(t)) \right\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 dt \\ &\leq C \Delta t h^4 \left( \left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right\|_{L^2(I_k, [H^2(\Omega)]^2)}^2 + \left\| \frac{\partial p}{\partial t} \right\|_{L^2(I_k, H^1(\Omega))}^2 \right), \end{aligned}$$

où  $I_k = (t^{k-1}, t^k)$ . Ainsi

$$\|\eta_1^k - \eta_1^{k-1}\|_{[L^2(\Omega)]^2} \leq C \sqrt{\Delta t} h^2 \left( \left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right\|_{L^2(I_k, [H^2(\Omega)]^2)} + \left\| \frac{\partial p}{\partial t} \right\|_{L^2(I_k, H^1(\Omega))} \right)$$

et on obtient

$$(3.2.25) \quad \|\eta_1^k - \eta_1^{k-1}\|_{[L^2(\Omega)]^2} \leq C_{1,k} \sqrt{\Delta t} h^2,$$

où les  $C_{1,k} > 0$  sont tels que

$$(3.2.26) \quad \sum_{k=1}^m (C_{1,k})^2 \leq C \left( \left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right\|_{L^2(0, T; [H^2(\Omega)]^2)}^2 + \left\| \frac{\partial p}{\partial t} \right\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))}^2 \right),$$

et  $C > 0$  est indépendante de  $m$ ,  $\Delta t$  et  $h$ .



ii) Estimation de  $\|\Delta t \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(t^k) - (\mathbf{u}(t^k) - \mathbf{u}(t^{k-1}))\|_0$ .

On a  $\mathbf{u}(t^k) - \mathbf{u}(t^{k-1}) - \Delta t \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(t^k) = \int_{t^{k-1}}^{t^k} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(t) - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(t^k) \right) dt$  et par conséquent, on obtient

$$\|\mathbf{u}(t^k) - \mathbf{u}(t^{k-1}) - \Delta t \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(t^k)\|_0 \leq \int_{t^{k-1}}^{t^k} \left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(t) - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(t^k) \right\|_0 dt.$$

Or, compte tenu de l'hypothèse de régularité faite sur  $\mathbf{u}$ , on a  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(t) - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(t^k) = \int_{t^{k-1}}^{t^k} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}(s) ds$ . Ainsi

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}(t^k) - \mathbf{u}(t^{k-1}) - \Delta t \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(t^k)\|_0 &\leq \int_{t^{k-1}}^{t^k} \int_t^{t^k} \left\| \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}(s) \right\|_0 ds dt \\ &\leq \Delta t \int_{t^{k-1}}^{t^k} \left\| \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}(t) \right\|_0 dt \\ &\leq \Delta t^{3/2} \left\| \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \right\|_{L^2(I_k, [L^2(\Omega)]^2)} \\ &= \Delta t^{3/2} C_{2,k}, \end{aligned} \tag{3.2.27}$$

où les  $C_{2,k} > 0$  sont tels que

$$\sum_{k=1}^m (C_{2,k})^2 \leq \left\| \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \right\|_{L^2(0,T;[L^2(\Omega)]^2)}^2. \tag{3.2.28}$$

iii) Estimation de  $C_k = \tilde{c}(\mathbf{u}(t^k), \mathbf{u}(t^k), \mathbf{w}_1^k) - \tilde{c}(\mathbf{u}_h^{k-1}, \mathbf{u}_h^k, \mathbf{w}_1^k)$ .

$$\begin{aligned} C_k &= \tilde{c}(\mathbf{u}(t^k) - \mathbf{u}_h^k, \mathbf{u}(t^k), \mathbf{w}_1^k) + \tilde{c}(\mathbf{u}_h^k - \mathbf{u}_h^{k-1}, \mathbf{u}(t^k), \mathbf{w}_1^k) \\ &\quad + \tilde{c}(\mathbf{u}_h^{k-1}, \mathbf{u}(t^k) - \mathbf{u}_h^k, \mathbf{w}_1^k) \\ &= -\tilde{c}(\mathbf{w}_1^k + \eta_1^k, \mathbf{u}(t^k), \mathbf{w}_1^k) + \tilde{c}(\mathbf{w}_1^k - \mathbf{w}_1^{k-1}, \mathbf{u}(t^k), \mathbf{w}_1^k) \\ &\quad - \tilde{c}(\Pi_h^1 \mathbf{u}(t^k) - \Pi_h^1 \mathbf{u}(t^{k-1}), \mathbf{u}(t^k), \mathbf{w}_1^k) - \tilde{c}(\mathbf{u}_h^{k-1}, \mathbf{w}_1^k + \eta_1^k, \mathbf{w}_1^k). \end{aligned}$$

Or,  $\tilde{c}(\mathbf{u}_h^{k-1}, \mathbf{w}_1^k, \mathbf{w}_1^k) = 0$  et

$$\begin{aligned} \tilde{c}(\mathbf{u}_h^{k-1}, \eta_1^k, \mathbf{w}_1^k) &= \tilde{c}(\mathbf{u}_h^{k-1} - \mathbf{u}(t^{k-1}), \eta_1^k, \mathbf{w}_1^k) + \tilde{c}(\mathbf{u}(t^{k-1}), \eta_1^k, \mathbf{w}_1^k) \\ &= \tilde{c}(\mathbf{w}_1^{k-1} + \eta_1^{k-1}, \eta_1^k, \mathbf{w}_1^k) - \tilde{c}(\mathbf{u}(t^{k-1}), \mathbf{w}_1^k, \eta_1^k) \\ &= \tilde{c}(\mathbf{w}_1^{k-1} + \eta_1^{k-1}, \eta_1^k, \mathbf{w}_1^k) - c(\mathbf{u}(t^{k-1}), \mathbf{w}_1^k, \eta_1^k). \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned} C_k &= -\tilde{c}(\mathbf{w}_1^k + \eta_1^k, \mathbf{u}(t^k), \mathbf{w}_1^k) + \tilde{c}(\mathbf{w}_1^k - \mathbf{w}_1^{k-1}, \mathbf{u}(t^k), \mathbf{w}_1^k) \\ &\quad - \tilde{c}(\Pi_h^1 \mathbf{u}(t^k) - \Pi_h^1 \mathbf{u}(t^{k-1}), \mathbf{u}(t^k), \mathbf{w}_1^k) \\ &\quad - \tilde{c}(\mathbf{w}_1^{k-1} + \eta_1^{k-1}, \eta_1^k, \mathbf{w}_1^k) + c(\mathbf{u}(t^{k-1}), \mathbf{w}_1^k, \eta_1^k). \end{aligned} \tag{3.2.29}$$

Estimation supplémentaire de  $c$ .

Pour tout  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in X$  et  $\mathbf{z} \in [W^{1,\infty}(\Omega)]^2$ , on a

$$\begin{aligned} \tilde{c}(\mathbf{w}, \mathbf{z}, \mathbf{v}) &= \frac{1}{2} [c(\mathbf{w}, \mathbf{z}, \mathbf{v}) - c(\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{z})] \\ &\leq C \left( \|\mathbf{w}\|_{[L^2(\Omega)]^2} \|\nabla \mathbf{z}\|_{[L^\infty(\Omega)]^2} \|\mathbf{v}\|_{[L^2(\Omega)]^2} \right. \\ &\quad \left. + \|\mathbf{w}\|_{[L^2(\Omega)]^2} \|\nabla \mathbf{v}\|_{[L^2(\Omega)]^2} \|\mathbf{z}\|_{[L^\infty(\Omega)]^2} \right) \end{aligned}$$

et donc

$$(3.2.30) \quad \tilde{c}(\mathbf{w}, \mathbf{z}, \mathbf{v}) \leq C \|\mathbf{w}\|_{[L^2(\Omega)]^2} \|\mathbf{z}\|_{[W^{1,\infty}(\Omega)]^2} \|\mathbf{v}\|_{[H^1(\Omega)]^2}.$$

En utilisant cette inégalité dans l'expression (3.2.29) de  $\mathcal{C}_k$ , on obtient

$$(3.2.31) \quad \begin{aligned} \mathcal{C}_k &\leq C_1 (\|\mathbf{w}_1^k\|_0 + \|\eta_1^k\|_0 + \|\mathbf{w}_1^k - \mathbf{w}_1^{k-1}\|_0 + \|\Pi_h^1 \mathbf{u}(t^k) - \Pi_h^1 \mathbf{u}(t^{k-1})\|_0) \|\mathbf{w}_1^k\|_1 \\ &+ C_2 (\|\mathbf{w}_1^{k-1}\|_1 + \|\eta_1^{k-1}\|_1) \|\eta_1^k\|_1 \|\mathbf{w}_1^k\|_1 + C_3 \|\mathbf{w}_1^k\|_1 \|\eta_1^k\|_0. \end{aligned}$$

Il reste à estimer le terme  $\|\Pi_h^1 \mathbf{u}(t^k) - \Pi_h^1 \mathbf{u}(t^{k-1})\|_0$ . On a

$$\Pi_h^1 \mathbf{u}(t^k) - \Pi_h^1 \mathbf{u}(t^{k-1}) = \int_{t^{k-1}}^{t^k} \frac{\partial}{\partial t} \Pi_h^1 \mathbf{u}(t) dt = \int_{t^{k-1}}^{t^k} \Pi_h^1 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(t) dt$$

et donc

$$\begin{aligned} \|\Pi_h^1 \mathbf{u}(t^k) - \Pi_h^1 \mathbf{u}(t^{k-1})\|_0 &\leq \int_{t^{k-1}}^{t^k} \|\Pi_h^1 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(t)\|_0 dt \\ &\leq \sqrt{\Delta t} \|\Pi_h^1 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\|_{L^2(I_k; [L^2(\Omega)]^2)}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, pour presque tout  $t \in (0, T)$ ,

$$\begin{aligned} \|\Pi_h^1 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(t)\|_{[L^2(\Omega)]^2} &\leq \|\Pi_h^1 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(t) - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(t)\|_{[L^2(\Omega)]^2} + \|\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(t)\|_{[L^2(\Omega)]^2} \\ &\leq Ch^2 \left( \|\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(t)\|_{[H^2(\Omega)]^2} + \|\frac{\partial p}{\partial t}(t)\|_{H^1(\Omega)} \right) + \|\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(t)\|_{[L^2(\Omega)]^2} \\ &\leq C \left( \|\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(t)\|_{[H^2(\Omega)]^2} + \|\frac{\partial p}{\partial t}(t)\|_{H^1(\Omega)} \right), \end{aligned}$$

où  $C > 0$  est indépendante de  $h$  et  $\Delta t$ . On obtient de cette façon

$$\|\Pi_h^1 \mathbf{u}(t^k) - \Pi_h^1 \mathbf{u}(t^{k-1})\|_0 \leq C\sqrt{\Delta t} \left( \|\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(t)\|_{L^2(I_k; [H^2(\Omega)]^2)} + \|\frac{\partial p}{\partial t}(t)\|_{L^2(I_k; H^1(\Omega))} \right),$$

soit encore

$$(3.2.32) \quad \|\Pi_h^1 \mathbf{u}(t^k) - \Pi_h^1 \mathbf{u}(t^{k-1})\|_0 \leq C_{3,k} \sqrt{\Delta t},$$

où les  $C_{3,k} > 0$  sont tels que

$$(3.2.33) \quad \sum_{k=1}^m (C_{3,k})^2 \leq C \left( \|\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(t)\|_{L^2(0,T; [H^2(\Omega)]^2)}^2 + \|\frac{\partial p}{\partial t}(t)\|_{L^2(0,T; H^1(\Omega))}^2 \right)$$

et  $C > 0$  est indépendante de  $m$ ,  $\Delta t$  et  $h$ . En utilisant (3.2.32) dans (3.2.31), ainsi que les estimations des  $\eta_1^k$  dans le Lemme 3.1, on obtient

$$(3.2.34) \quad \mathcal{C}_k \leq C \left( \|\mathbf{w}_1^k\|_0 + h^2 + \|\mathbf{w}_1^k - \mathbf{w}_1^{k-1}\|_0 + C_{3,k} \sqrt{\Delta t} + h \|\mathbf{w}_1^{k-1}\|_1 \right) \|\mathbf{w}_1^k\|_1.$$

On est à présent en mesure d'estimer les  $\mathbf{w}_1^k$ . Revenons à (3.2.23). En tenant compte de (3.2.24), (3.2.25), (3.2.27) et (3.2.34), on obtient

$$\begin{aligned}
 & \|\mathbf{w}_1^k\|_0^2 - \|\mathbf{w}_1^{k-1}\|_0^2 + \|\mathbf{w}_1^k - \mathbf{w}_1^{k-1}\|_0^2 + \nu \Delta t |\mathbf{w}_1^k|_1^2 \\
 & \leq \left( \|\eta_1^k - \eta_1^{k-1}\|_0 + \left\| \Delta t \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(t^k) - (\mathbf{u}(t^k) - \mathbf{u}(t^{k-1})) \right\|_0 \right) \|\mathbf{w}_1^k\|_0 + \Delta t \mathcal{C}_k \\
 & \leq (C_{1,k} h^2 + C_{2,k} \Delta t) \sqrt{\Delta t} \|\mathbf{w}_1^k\|_0 \\
 & \quad + C \Delta t \left( \|\mathbf{w}_1^k\|_0 + h \|\mathbf{w}_1^{k-1}\|_1 + \|\mathbf{w}_1^k - \mathbf{w}_1^{k-1}\|_0 + h^2 + C_{3,k} \sqrt{\Delta t} \right) \|\mathbf{w}_1^k\|_1 \\
 & \leq \Delta t \|\mathbf{w}_1^k\|_0^2 + \frac{1}{4} (C_{1,k} h^2 + C_{2,k} \Delta t)^2 + \varepsilon_1 \Delta t \|\mathbf{w}_1^k\|_1^2 + C \frac{\Delta t}{\varepsilon_1} \|\mathbf{w}_1^k\|_0^2 \\
 & \quad + \varepsilon_2 \Delta t \|\mathbf{w}_1^k\|_1^2 + C \frac{\Delta t}{\varepsilon_2} h^2 \|\mathbf{w}_1^{k-1}\|_1^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{w}_1^k - \mathbf{w}_1^{k-1}\|_0^2 + C \frac{\Delta t^2}{2} \|\mathbf{w}_1^k\|_1^2 \\
 & \quad + \varepsilon_3 \Delta t \|\mathbf{w}_1^k\|_1^2 + C \frac{\Delta t}{\varepsilon_3} \left( h^2 + C_{3,k} \sqrt{\Delta t} \right)^2
 \end{aligned}$$

avec  $\varepsilon_i > 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ , par inégalité de Young. On choisit  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \nu/6$  et on obtient alors

$$\begin{aligned}
 & (1 - \Delta t) \|\mathbf{w}_1^k\|_0^2 - \|\mathbf{w}_1^{k-1}\|_0^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{w}_1^k - \mathbf{w}_1^{k-1}\|_0^2 + \frac{\nu}{2} \Delta t |\mathbf{w}_1^k|_1^2 \\
 & \leq C \frac{\Delta t}{\nu} \|\mathbf{w}_1^k\|_0^2 + C \frac{\Delta t}{\nu} h^2 \|\mathbf{w}_1^{k-1}\|_1^2 + C \frac{\Delta t^2}{2} \|\mathbf{w}_1^k\|_1^2 \\
 & \quad + C [(C_{1,k})^2 h^4 + (C_{2,k})^2 \Delta t^2 + \Delta t h^4 + \Delta t^2 (C_{3,k})^2]
 \end{aligned}$$

Par inégalité de Poincaré, il vient

$$\begin{aligned}
 & (1 - \Delta t - C \frac{\Delta t}{\nu}) \|\mathbf{w}_1^k\|_0^2 - \|\mathbf{w}_1^{k-1}\|_0^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{w}_1^k - \mathbf{w}_1^{k-1}\|_0^2 + \frac{1}{2} (\nu - C \Delta t) \Delta t |\mathbf{w}_1^k|_1^2 \\
 & \leq C \frac{\Delta t}{\nu} h^2 |\mathbf{w}_1^{k-1}|_1^2 + C [(C_{1,k})^2 h^4 + [(C_{2,k})^2 + (C_{3,k})^2] \Delta t^2 + \Delta t h^4].
 \end{aligned}$$

On somme alors sur  $k = 1, \dots, m$ . En tenant compte des propriétés (3.2.26), (3.2.28), (3.2.33) sur les constantes  $C_{i,k}$ , on obtient

$$\begin{aligned}
 & \left( 1 - (1 + \frac{C}{\nu}) \Delta t \right) \|\mathbf{w}_1^m\|_0^2 - \left( 1 + \frac{C}{\nu} \right) \Delta t \sum_{k=1}^{m-1} \|\mathbf{w}_1^k\|_0^2 - \|\mathbf{w}_1^0\|_0^2 \\
 & \quad + \frac{1}{2} (\nu - C \Delta t) \Delta t \sum_{k=1}^m |\mathbf{w}_1^k|_1^2 \leq C \frac{\Delta t}{\nu} h^2 \left( |\mathbf{w}_1^0|_1^2 + \sum_{k=1}^{m-1} |\mathbf{w}_1^k|_1^2 \right) \\
 & \quad + C (h^4 + \Delta t^2 + \Delta t h^4).
 \end{aligned}$$

Finalement, on a

$$\begin{aligned}
 & \left( 1 - (1 + \frac{C}{\nu}) \Delta t \right) \|\mathbf{w}_1^m\|_0^2 + \frac{1}{2} \left( \nu - C \Delta t - C \frac{h^2}{\nu} \right) \Delta t \sum_{k=1}^m |\mathbf{w}_1^k|_1^2 \\
 & \leq \|\mathbf{w}_1^0\|_0^2 + C \frac{\Delta t}{\nu} h^2 |\mathbf{w}_1^0|_1^2 + C (h^2 + \Delta t)^2 + \left( 1 + \frac{C}{\nu} \right) \Delta t \sum_{k=1}^{m-1} \|\mathbf{w}_1^k\|_0^2.
 \end{aligned}$$

On choisit  $\Delta t$  tel que

$$1 - (1 + \frac{C}{\nu}) \Delta t \geq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \nu - C \Delta t - C \frac{h^2}{\nu} = \delta > 0 \quad \text{avec} \quad 0 < \delta < \nu.$$

Les deux conditions sont vérifiées si

$$\begin{aligned}\Delta t &\leq C_1\nu \\ h &\leq C_2\nu,\end{aligned}$$

où  $C_1, C_2 > 0$  sont indépendantes de  $h, \Delta t$  et  $\nu$ . On obtient ainsi

$$\|\mathbf{w}_1^m\|_0^2 + \delta\Delta t \sum_{k=1}^m |\mathbf{w}_1^k|_1^2 \leq C \left( \|\mathbf{w}_1^0\|_1^2 + (h^2 + \Delta t)^2 + \Delta t \sum_{k=1}^{m-1} |\mathbf{w}_1^k|_0^2 \right).$$

On conclut par le Lemme de Gronwall discret que

$$\|\mathbf{w}_1^m\|_0^2 + \delta\Delta t \sum_{k=1}^m |\mathbf{w}_1^k|_1^2 \leq C \left( \|\mathbf{w}_1^0\|_1^2 + (h^2 + \Delta t)^2 \right).$$

□

*Remarque.* Dans la pratique, le schéma (II) (et dans une moindre mesure le schéma (I)) est utilisé pour des viscosités  $\nu$  assez grandes à cause de la condition qui relie  $\Delta t$  et  $h$  à  $\nu$ . Pour les cas de faibles viscosités (forts nombres de Reynolds), le terme nonlinéaire de convection  $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$  peut être traité par un schéma *upwind* ou une méthode de diffusion de lignes de courants “Streamline Diffusion Method” (SDM).

### 3. Méthodes de décomposition d’opérateurs

**3.1. Introduction.** Les méthodes de décomposition d’opérateurs portent sur la résolution de problèmes du type

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} + A(\varphi) = 0 \\ \varphi(0) = \varphi_0, \end{cases}$$

où  $A$  est un opérateur (nonlinéaire) tel que  $A = A_1 + A_2$  avec des opérateurs  $A_1$  et  $A_2$  plus “simples” que  $A$ . Les méthodes de décomposition d’opérateurs sont basées sur la décomposition de  $A$ . Il s’agit de résoudre successivement plusieurs problèmes qui sont plus simples que le problème initial  $(\mathcal{P})$ .

*Exemples.*

(1) *Schéma de Yanenko.*

$$\begin{aligned}\frac{\varphi^{n+1/2} - \varphi^n}{\Delta t} + A_1(\varphi^{n+1/2}) &= 0, \\ \frac{\varphi^{n+1} - \varphi^{n+1/2}}{\Delta t} + A_2(\varphi^{n+1}) &= 0.\end{aligned}$$

Dans le cas où  $A$  est linéaire (ainsi que  $A_1$  et  $A_2$ ), on a  $\frac{\varphi^{n+1} - \varphi^n}{\Delta t} + A\varphi^{n+1} = -\Delta t A_1 A_2 \varphi^{n+1}$ . Dans ce cas, le schéma de Yanenko est consistant en  $\mathcal{O}(\Delta t)$ .

(2) *Schéma de Peaceman-Rachford.*

$$\begin{aligned}\frac{\varphi^{n+1/2} - \varphi^n}{\Delta t/2} + A_1(\varphi^{n+1/2}) + A_2(\varphi^n) &= 0, \\ \frac{\varphi^{n+1} - \varphi^{n+1/2}}{\Delta t/2} + A_1(\varphi^{n+1/2}) + A_2(\varphi^{n+1}) &= 0.\end{aligned}$$

Ce schéma est consistant en  $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ .

**3.2. Méthode de projection.** Cette méthode est due à Temam [13] et Chorin [4] (voir également [9]). On décompose l'opérateur de Navier-Stokes  $A$  en  $A = A_1 + A_2$  où

★  $A_1$  est la somme des termes inertiels et de viscosité.

★  $A_2$  prend en compte le terme de pression et la condition d'incompressibilité.

La méthode de projection est construite à partir du schéma semi-discrétisé qui prend en compte la décomposition précédente. On définit deux suites de vecteurs  $\{\mathbf{u}^k\}$  et  $\{\mathbf{u}^{k+1/2}\}$ ,  $k \geq 0$ , avec  $\mathbf{u}^0$  donné, à partir des deux problèmes suivants :

(1) Trouver  $\mathbf{u}^{k+1/2}$  telle que

$$(3.3.1) \quad \frac{\mathbf{u}^{k+1/2} - \mathbf{u}^k}{\Delta t} - \nu \Delta \mathbf{u}^{k+1/2} + (\mathbf{u}^k \cdot \nabla) \mathbf{u}^{k+1/2} = \mathbf{f}^{k+1} \quad \text{dans } \Omega,$$

$$(3.3.2) \quad \mathbf{u}^{k+1/2} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

Si  $\mathbf{f}$  est continue en temps alors on prend  $\mathbf{f}^{k+1} = \mathbf{f}((k+1)\Delta t)$ . Si  $\mathbf{f}$  est moins régulière, de carré intégrable en temps, on prend

$$\mathbf{f}^{k+1} = \frac{1}{\Delta t} \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} \mathbf{f}(t) dt.$$

(2) Trouver  $(\mathbf{u}^{k+1}, p^{k+1})$  tels que

$$(3.3.3) \quad \frac{\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^{k+1/2}}{\Delta t} + \nabla p^{k+1} = 0 \quad \text{dans } \Omega,$$

$$(3.3.4) \quad \operatorname{div} \mathbf{u}^{k+1} = 0 \quad \text{dans } \Omega,$$

$$(3.3.5) \quad \mathbf{u}^{k+1} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

En fait, on a  $\mathbf{u}^{k+1} \in V = \{\mathbf{v} \in X \mid \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \text{ dans } \Omega\}$  et  $\mathbf{u}^{k+1} = P\mathbf{u}^{k+1/2}$  où  $P : X \rightarrow V$  est l'opérateur de projection orthogonale dans  $V$  avec le produit scalaire  $[L^2(\Omega)]^2$ , c'est-à-dire qu'on a :

$$(3.3.6) \quad (\mathbf{u}^{k+1}, \mathbf{w}) = (\mathbf{u}^{k+1/2}, \mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{w} \in V.$$

La condition limite(3.3.5) est une conséquence du résultat suivant (résultat admis, voir par exemple [6]).

**THÉORÈME 3.1.** (*Décomposition de Helmholtz ou Théorème de Ladyzenskaja*)  
Toute fonction  $\mathbf{v} \in [L^2(\Omega)]^N$  (avec  $N = 2$  ou  $3$ ) peut être représentée de façon unique par

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} + \nabla\psi,$$

où  $\mathbf{w} \in H_{\operatorname{div}}(\Omega) = \{\mathbf{w} \in [L^2(\Omega)]^N \mid \operatorname{div} \mathbf{w} = 0 \text{ dans } \Omega, \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$  et  $\psi \in H^1(\Omega)$ .

Pour obtenir la condition limite (3.3.5) à partir de ce résultat, on écrit (3.3.3) sous la forme

$$\mathbf{u}^{k+1/2} = \mathbf{u}^{k+1} + \nabla(\Delta t p^{k+1}).$$

On voit ainsi que l'espace naturel pour  $\mathbf{u}^{k+1}$  est l'espace  $H_{\operatorname{div}}(\Omega)$ .

Résolution de l'étape (2). On calcule d'abord la pression  $p^{k+1}$ . On prend la divergence de (3.3.3) et en utilisant la condition d'incompressibilité (3.3.4), on obtient

$$\Delta p^{k+1} = \frac{1}{\Delta t} \operatorname{div} \mathbf{u}^{k+1/2} \quad \text{dans } \Omega.$$

La condition limite pour  $p^{k+1}$  est obtenue en considérant la composante normale de l'équation (3.3.3) sur  $\partial\Omega$  :

$$\mathbf{u}^{k+1} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{u}^{k+1/2} \cdot \mathbf{n} + \Delta t \frac{\partial p^{k+1}}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

Or  $\mathbf{u}^{k+1} \cdot \mathbf{n} = 0$  d'après (3.3.5) et  $\mathbf{u}^{k+1/2} \cdot \mathbf{n} = 0$  d'après (3.3.2) et par conséquent  $p^{k+1}$  doit satisfaire la condition de Neumann

$$\frac{\partial p^{k+1}}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

Une fois la pression  $p^{k+1}$  calculée, on en déduit la vitesse  $\mathbf{u}^{k+1}$  par (3.3.3).

En résumé, la méthode de projection s'écrit :

- (1) *Problème d'advection-diffusion pour la vitesse.*

Trouver  $\mathbf{u}^{k+1/2}$  telle que

$$(3.3.7) \quad \frac{\mathbf{u}^{k+1/2} - \mathbf{u}^k}{\Delta t} - \nu \Delta \mathbf{u}^{k+1/2} + (\mathbf{u}^k \cdot \nabla) \mathbf{u}^{k+1/2} = \mathbf{f}^{k+1} \quad \text{dans } \Omega,$$

$$(3.3.8) \quad \mathbf{u}^{k+1/2} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

- (2) *Problème de Poisson pour la pression.*

Trouver  $p^{k+1}$  telle que

$$(3.3.9) \quad \Delta p^{k+1} = \frac{1}{\Delta t} \operatorname{div} \mathbf{u}^{k+1/2} \quad \text{dans } \Omega,$$

$$(3.3.10) \quad \frac{\partial p^{k+1}}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

- (3) *Calcul de la vitesse  $\mathbf{u}^{k+1}$ .*

$$(3.3.11) \quad \mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{u}^{k+1/2} - \Delta t \nabla p^{k+1}.$$

Il faut remarquer que les vitesses approchées  $\mathbf{u}^k$  ne sont pas nulles sur le bord  $\partial\Omega$  (seules leurs composantes normales sont nulles). Cependant, on peut montrer (voir [9], [12]) que l'erreur de convergence sur la vitesse en norme  $L^2$  est en  $\mathcal{O}(\Delta t)$ . L'erreur de convergence sur la pression est aussi en  $\mathcal{O}(\Delta t)$  mais dans la norme duale de  $H^1(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ . En fait, en combinant (3.3.7) et (3.3.9), on a

$$\begin{aligned} \Delta p^{k+1} &= \operatorname{div} \left( \mathbf{f}^{k+1} + \nu \Delta \mathbf{u}^{k+1/2} - (\mathbf{u}^k \cdot \nabla) \mathbf{u}^{k+1/2} \right) \\ &= \operatorname{div} \mathbf{f}^{k+1} - \sum_{i,j} \frac{\partial u_i^k}{\partial x_j} \frac{\partial u_j^{k+1/2}}{\partial x_i} + \nu \Delta (\operatorname{div} \mathbf{u}^{k+1/2}) \\ &\quad - \mathbf{u}^k \cdot \nabla (\operatorname{div} \mathbf{u}^{k+1/2}) \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

avec  $\partial p^{k+1} / \partial \mathbf{n} = 0$  sur  $\partial\Omega$ . La pression exacte vérifie, quant à elle,

$$(3.3.13) \quad \Delta p = \operatorname{div} \mathbf{f} - \sum_{i,j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad \text{dans } \Omega,$$

$$(3.3.14) \quad \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = (\mathbf{f} + \nu \Delta \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

La différence entre le système exacte (3.3.13),(3.3.14) et le système approché (3.3.12), (3.3.10) pour la pression, est responsable de la faible convergence de la pression  $p^k(\mathbf{x})$  vers  $p(\mathbf{x}, t^k)$ . Cette méthode de projection est dans la pratique bien adaptée au calcul des vitesses mais pas à celui de la pression. On peut cependant montrer (voir [12]) que l'erreur sur la pression est confinée près du bord, dans une bande d'épaisseur  $\delta \sim \sqrt{\nu \Delta t}$  et décroît exponentiellement vers l'intérieur.

**3.3. Méthode de Glowinski.** Cette méthode est due à R. Glowinski (voir [7],[8]). Il s'agit d'un schéma de type Peaceman-Rachford appliqué aux équations de Navier-Stokes. Dans sa version semi-discretisé en temps, le schéma s'écrit (avec  $0 < \eta < 1$ ) :

(1) *Problème de Stokes.*

Trouver  $(\mathbf{u}^{k+1/2}, p^{k+1/2})$  tels que

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{u}^{k+1/2} - \mathbf{u}^k}{\Delta t/2} - \eta \nu \Delta \mathbf{u}^{k+1/2} + \nabla p^{k+1/2} &= \mathbf{f}^{k+1/2} - (1 - \eta) \nu \Delta \mathbf{u}^k \\ &\quad - (\mathbf{u}^k \cdot \nabla) \mathbf{u}^k \quad \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}^{k+1/2} &= 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u}^{k+1/2} &= 0 \quad \text{sur } \partial \Omega. \end{aligned}$$

(2) *Problème elliptique (nonlinéaire) de type convection-diffusion.*

Trouver  $\mathbf{u}^{k+1}$  telle que

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^{k+1/2}}{\Delta t/2} + (1 - \eta) \nu \Delta \mathbf{u}^{k+1} + (\mathbf{u}^{k+1} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{k+1} &= \mathbf{f}^{k+1/2} - \eta \nu \Delta \mathbf{u}^{k+1/2} \\ &\quad - \nabla p^{k+1/2} \quad \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u}^{k+1} &= 0 \quad \text{sur } \partial \Omega. \end{aligned}$$

On peut remplacer le terme  $(\mathbf{u}^{k+1} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{k+1}$  par  $(\mathbf{u}^{k+1/2} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{k+1}$ . Il existe un  $\theta$ -schéma à 3 étapes qui généralise ce schéma (voir [7],[8]).

#### 4. Méthode des caractéristiques

Pour  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$  et  $t \in [0, T]$ , on définit la caractéristique  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\tau; t, \mathbf{x})$  associée au champ de vitesse  $\mathbf{u}$ , vérifiant

$$(3.4.1) \quad \frac{d\mathbf{X}}{d\tau}(\tau; t, \mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{X}(\tau; t, \mathbf{x}), \tau), \quad \tau \in (0, T)$$

$$(3.4.2) \quad \mathbf{X}(t; t, \mathbf{x}) = \mathbf{x}.$$

La caractéristique  $\mathbf{X}(\tau; t, \mathbf{x})$  représente la position à l'instant  $\tau$  d'une particule se trouvant en  $\mathbf{x}$  à l'instant  $t$ . L'introduction des caractéristiques permet de faire apparaître la dérivée matérielle de la vitesse dans les équations de Navier-Stokes et d'"absorber" ainsi la nonlinéarité. On a

$$\frac{d}{d\tau} [\mathbf{u}(\mathbf{X}(\tau; t, \mathbf{x}), \tau)] = \left( \frac{d\mathbf{X}}{d\tau}(\tau; t, \mathbf{x}) \cdot \nabla \right) \mathbf{u}(\mathbf{X}(\tau; t, \mathbf{x}), \tau) + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tau}(\mathbf{X}(\tau; t, \mathbf{x}), \tau)$$

et en utilisant la définition (3.4.1), (3.4.2) de la caractéristique, on obtient

$$(3.4.3) \quad \frac{d}{d\tau} [\mathbf{u}(\mathbf{X}(\tau; t, \mathbf{x}), \tau)]_{\tau=t} = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tau}(\mathbf{x}, t).$$

On écrit alors les équations de Navier-Stokes sous la forme lagrangienne suivante :

$$(3.4.4) \quad \frac{d}{d\tau} [\mathbf{u}(\mathbf{X}(\tau; t, \mathbf{x}), \tau)]|_{\tau=t} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{pour } (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times (0, T),$$

$$(3.4.5) \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{pour } (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times (0, T),$$

$$(3.4.6) \quad \mathbf{u} = 0 \quad \text{pour } (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times (0, T).$$

Le résultat suivant fournit quelques propriétés importantes des caractéristiques.

**LEMME 3.2.** *On suppose que  $\mathbf{u} \in C([0, T]; [C^{0,1}(\bar{\Omega})]^2 \cap V)$  où  $V = \{\mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^2; \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \text{ dans } \Omega\}$ . Pour  $|\tau - t|$  suffisamment petit, l'application  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{X}(\tau, t, \mathbf{x})$  est un homéomorphisme<sup>2</sup> sur  $\Omega$ . Elle est presque partout dérivable dans  $\Omega$  et son jacobien vaut 1 presque partout dans  $\Omega$ .*

*Démonstration.* L'existence et la continuité de l'application  $\mathbf{F} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{X}(\tau; t, \mathbf{x})$  viennent du Théorème de Cauchy-Lipschitz. Puisque  $\mathbf{u} = 0$  sur le bord  $\partial\Omega$ , on a  $\mathbf{F}(\Omega) \subset \Omega$ . De plus, pour tout  $\mathbf{y} \in \Omega$ , on a  $\mathbf{X}(\tau; t, \mathbf{X}(t; \tau, \mathbf{y})) = \mathbf{y}$  et par conséquent  $\mathbf{F}$  est surjective sur  $\Omega$ . Par ailleurs,  $\mathbf{F}$  est injective dans  $\Omega$ . En effet, soient deux points  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  de  $\Omega$  tels que  $\mathbf{X}(\tau; t, \mathbf{x}) = \mathbf{X}(\tau; t, \mathbf{y})$ . En intégrant (3.4.1) et (3.4.2), on a

$$(3.4.7) \quad \mathbf{X}(\tau; t, \mathbf{x}) = \mathbf{x} + \int_t^\tau \mathbf{u}(\mathbf{X}(s; t, \mathbf{x}), s) ds$$

$$(3.4.8) \quad \mathbf{X}(\tau; t, \mathbf{y}) = \mathbf{y} + \int_t^\tau \mathbf{u}(\mathbf{X}(s; t, \mathbf{y}), s) ds,$$

ce qui implique nécessairement  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ . Montrons à présent que  $\mathbf{F}$  est lipschitzienne sur  $\Omega$ . En faisant la différence des relations (3.4.7) et (3.4.8) pour deux points quelconques  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  de  $\Omega$ , on voit que

$$|\mathbf{X}(\tau; t, \mathbf{x}) - \mathbf{X}(\tau; t, \mathbf{y})| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + \|\mathbf{u}\|_{C([0, T], C^{0,1}(\bar{\Omega}))} \left| \int_t^\tau |\mathbf{X}(s; t, \mathbf{x}) - \mathbf{X}(s; t, \mathbf{y})| ds \right|.$$

On déduit du Lemme de Gronwall que

$$(3.4.9) \quad |\mathbf{X}(\tau; t, \mathbf{x}) - \mathbf{X}(\tau; t, \mathbf{y})| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \exp\left(|\tau - t| \|\mathbf{u}\|_{C([0, T], C^{0,1}(\bar{\Omega}))}\right).$$

Par conséquent  $\mathbf{F}$  est lipschitzienne et donc elle est presque partout dérivable dans  $\Omega$  (Théorème de Rannacher). On note  $J(\tau; t, \mathbf{x})$  le jacobien de  $\mathbf{F}$  aux points  $\mathbf{x}$  où elle est dérivable. On montre (identité de Liouville) que

$$(3.4.10) \quad \frac{dJ}{d\tau}(\tau; t, \mathbf{x}) = (\operatorname{div} \mathbf{u})(\mathbf{X}(\tau; t, \mathbf{x}), \tau) J(\tau; t, \mathbf{x}).$$

Puisque  $J(t; t, \mathbf{x}) = 1$  et que  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$  p.p. dans  $\Omega$ , on a

$$(3.4.11) \quad J(\tau; t, \mathbf{x}) = 1 \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

Il reste à établir que l'application inverse  $\mathbf{F}^{-1}$  est continue dans  $\Omega$ . Pour  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  deux points quelconques de  $\Omega$  on a, d'après les relations (3.4.7) et (3.4.8) et en utilisant

2. c'est une bijection continue sur  $\Omega$  et dont l'application inverse est continue sur  $\Omega$ .



(3.4.9) :

$$\begin{aligned}
|\mathbf{X}(\tau; t, \mathbf{x}) - \mathbf{X}(\tau; t, \mathbf{y})| &\geq |\mathbf{x} - \mathbf{y}| - \left| \int_t^\tau |\mathbf{u}(s; t, \mathbf{x}) - \mathbf{u}(s; t, \mathbf{y})| ds \right| \\
&\geq |\mathbf{x} - \mathbf{y}| - \Lambda \left| \int_t^\tau |\mathbf{X}(s; t, \mathbf{x}) - \mathbf{X}(s; t, \mathbf{y})| ds \right| \\
&\geq |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \left( 1 - \Lambda |\tau - t| \exp(\Lambda |\tau - t|) \right),
\end{aligned}$$

avec  $\Lambda = \|\mathbf{u}\|_{C([0, T], C^{0,1}(\bar{\Omega}))}$ . Ainsi, pour  $|\tau - t|$  suffisamment petit,  $\mathbf{F}^{-1}$  est continue dans  $\Omega$ .  $\square$

**4.1. Semi-discrétisation en temps.** On se donne  $\mathbf{u}^0 \in V$  et on cherche  $(\mathbf{u}^{k+1}, p^{k+1}) \in X \times Y$  tels que

$$(3.4.12) \quad \left( \frac{\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k \circ \mathbf{X}^k}{\Delta t}, \mathbf{v} \right) + a(\mathbf{u}^{k+1}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p^{k+1}) = (\mathbf{f}^{k+1}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in X,$$

$$(3.4.13) \quad b(\mathbf{u}^{k+1}, q) = 0 \quad \forall q \in Y.$$

La caractéristique approchée  $\mathbf{X}^k(\mathbf{x})$  correspond à la position à l'instant  $t^k$  d'une particule qui sera en  $\mathbf{x}$  à l'instant  $t^{k+1}$  sous l'action du champ de vitesse  $\mathbf{u}^k$ . Plus précisément,  $\mathbf{X}^k(\mathbf{x}) = \varphi(t^k; t^{k+1}, \mathbf{x})$  où  $\varphi = \varphi(\cdot, t^{k+1}, \mathbf{x})$  vérifie

$$(3.4.14) \quad \frac{d\varphi}{dt}(t; t^{k+1}, \mathbf{x}) = \mathbf{u}^k(\varphi(t; t^{k+1}, \mathbf{x})), \quad t^k \leq t < t^{k+1}$$

$$(3.4.15) \quad \varphi(t^{k+1}; t^{k+1}, \mathbf{x}) = \mathbf{x}.$$

On peut montrer que  $\mathbf{u}^k \in X \Rightarrow \exists! \varphi(\cdot, t^{k+1}, \mathbf{x}) \in C^1([t^k, t^{k+1}])$  pour presque tout  $\mathbf{x} \in \Omega$ . De plus, comme pour le Lemme 4.1, on peut montrer que l'application  $\mathbf{x} \mapsto \varphi(t; t^{k+1}, \mathbf{x})$  est une bijection continue de  $\Omega$  dans  $\Omega$  et puisque  $\operatorname{div} \mathbf{u}^k = 0$  p.p. dans  $\Omega$ , on montre que  $\det(\nabla \varphi(t; t^{k+1}, \mathbf{x})) = 1$  p.p. dans  $\Omega$ .

**4.2. Stabilité.** On note  $\|\cdot\|_0 = \|\cdot\|_{[L^2(\Omega)]^2}$ . En prenant  $\mathbf{v} = \mathbf{u}^{k+1}$  dans (3.4.12) et en utilisant (3.4.13) on obtient

$$\|\mathbf{u}^{k+1}\|_0^2 + \nu \Delta t \|\nabla \mathbf{u}^{k+1}\|_0^2 = \Delta t (\mathbf{f}^{k+1}, \mathbf{u}^{k+1}) + (\mathbf{u}^k \circ \mathbf{X}^k, \mathbf{u}^{k+1})$$

Par inégalité d'Hölder, il vient

$$(3.4.16) \quad \|\mathbf{u}^{k+1}\|_0^2 + \nu \Delta t \|\nabla \mathbf{u}^{k+1}\|_0^2 \leq (\Delta t \|\mathbf{f}^{k+1}\|_0 + \|\mathbf{u}^k \circ \mathbf{X}^k\|_0) \|\mathbf{u}^{k+1}\|_0.$$

Or, pour toute fonction  $\phi$  définie et intégrable dans  $\Omega$ , on obtient par le changement de variable  $\mathbf{y} = \mathbf{X}^k(\mathbf{x})$ ,

$$(3.4.17) \quad \int_{\Omega} \phi \circ \mathbf{X}^k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \phi(\mathbf{y}) \det(\nabla \mathbf{X}^k)^{-1} d\mathbf{y} = \int_{\Omega} \phi(\mathbf{y}) d\mathbf{y},$$

puisque  $\det(\nabla \mathbf{X}^k) = 1$  p.p. dans  $\Omega$ . En appliquant (3.4.17) avec  $\phi(\mathbf{x}) = |\mathbf{u}^k(\mathbf{x})|^2$ , on obtient

$$(3.4.18) \quad \|\mathbf{u}^k \circ \mathbf{X}^k\|_0 = \|\mathbf{u}^k\|_0.$$

De cette façon, l'inégalité (3.4.16) s'écrit

$$\|\mathbf{u}^{k+1}\|_0^2 + \nu \Delta t \|\nabla \mathbf{u}^{k+1}\|_0^2 \leq (\Delta t \|\mathbf{f}^{k+1}\|_0 + \|\mathbf{u}^k\|_0) \|\mathbf{u}^{k+1}\|_0.$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré et l'inégalité  $ab \leq (a^2 + b^2)/2$ , on a

$$\|\mathbf{u}^{k+1}\|_0^2 + \nu \Delta t \|\nabla \mathbf{u}^{k+1}\|_0^2 \leq C(\Omega) \Delta t \|\mathbf{f}^{k+1}\|_0 \|\nabla \mathbf{u}^{k+1}\|_0 + \frac{1}{2} \|\mathbf{u}^k\|_0^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{u}^{k+1}\|_0^2.$$

Par application de l'inégalité de Young sur le premier terme du membre de droite, on obtient

$$\|\mathbf{u}^{k+1}\|_0^2 + 2\nu \Delta t \|\nabla \mathbf{u}^{k+1}\|_0^2 \leq \nu \Delta t \|\nabla \mathbf{u}^{k+1}\|_0^2 + C \frac{\Delta t}{\nu} \|\mathbf{f}^{k+1}\|_0^2 + \|\mathbf{u}^k\|_0^2$$

soit encore

$$\|\mathbf{u}^{k+1}\|_0^2 + \nu \Delta t \|\nabla \mathbf{u}^{k+1}\|_0^2 \leq C \frac{\Delta t}{\nu} \|\mathbf{f}^{k+1}\|_0^2 + \|\mathbf{u}^k\|_0^2.$$

En sommant sur  $k = 0, \dots, m-1$  avec  $1 \leq m \leq n$  (on rappelle que  $n\Delta t = T$ ), on obtient

$$(3.4.19) \quad \|\mathbf{u}^m\|_0^2 + \nu \Delta t \sum_{k=1}^m \|\nabla \mathbf{u}^k\|_0^2 \leq C \frac{\Delta t}{\nu} \sum_{k=1}^m \|\mathbf{f}^k\|_0^2 + \|\mathbf{u}^0\|_0^2.$$

La stabilité du schéma est ainsi établie.

**4.3. Estimation d'erreurs.** On donne à présent une estimation de l'erreur de convergence pour la vitesse. On note toujours la norme  $\|\cdot\|_0 = \|\cdot\|_{[L^2(\Omega)]^2}$ .

PROPOSITION 3.4. *On suppose que la solution exacte  $\mathbf{u}$  des équations de Navier-Stokes possède les propriétés de régularité suivantes :*

$$(3.4.20) \quad \begin{aligned} \mathbf{u} &\in C([0, T]; [W^{1,\infty}(\Omega)]^2 \cap V), \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} &\in C([0, T]; [L^2(\Omega)]^2), \\ \frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{u} \circ \mathbf{X}) &\in L^2((0, T) \times \Omega). \end{aligned}$$

On suppose de plus que  $\|\mathbf{u}(\cdot, 0) - \mathbf{u}^0\|_0 = \mathcal{O}(\Delta t)$ . Alors, il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $\Delta t$  telle que

$$(3.4.21) \quad \|\mathbf{u}(\cdot, t^m) - \mathbf{u}^m\|_0 + \left( \nu \Delta t \sum_{k=1}^m \|\nabla(\mathbf{u}(\cdot, t^k) - \mathbf{u}^k)\|_0^2 \right)^{1/2} \leq C \Delta t,$$

pour  $m = 0, \dots, n$ .

*Remarque.* Le schéma est d'ordre  $\mathcal{O}(\Delta t)$  pour les normes  $l^\infty([L^2(\Omega)]^2)$  et  $l^2([H^1(\Omega)]^2)$ .

Pour établir l'estimation d'erreurs, on aura besoin du résultat suivant d'approximation des caractéristiques.

LEMME 3.3. *Sous les hypothèses de régularité (3.4.20) portant sur la solution exacte  $\mathbf{u}$ , on a, pour  $k = 0, \dots, n$ ,*

$$(3.4.22) \quad \|\mathbf{X}(t^k; t^{k+1}, \cdot) - \mathbf{X}^k\|_0 \leq C \Delta t \left( \|\mathbf{u}(\cdot, t^k) - \mathbf{u}^k\|_0 + \sqrt{\Delta t} \left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right\|_{L^2(I_k, [L^2(\Omega)]^2)} \right)$$

où  $I_k = (t^k, t^{k+1})$  et la constante  $C > 0$  ne dépend que de  $T$  et  $\|\nabla \mathbf{u}(\cdot, t^k)\|_{[L^\infty(\Omega)]^2}$ .

*Démonstration du Lemme 3.3.* Les caractéristiques exactes  $\mathbf{X}$  et approchées  $\varphi$  vérifient les relations

$$(3.4.23) \quad \mathbf{X}(t; t^{k+1}, \mathbf{x}) = \mathbf{x} + \int_{t^{k+1}}^t \mathbf{u}(\mathbf{X}(s; t^{k+1}, \mathbf{x}), s) ds,$$

$$(3.4.24) \quad \varphi(t; t^{k+1}, \mathbf{x}) = \mathbf{x} + \int_{t^{k+1}}^t \mathbf{u}^k(\varphi(s; t^{k+1}, \mathbf{x})) ds.$$

Pour simplifier l'écriture, on oublie la dépendance de  $\mathbf{X}$  et  $\varphi$  en  $t^{k+1}$  c'est-à-dire qu'on note désormais (sauf en cas d'ambiguïté)

$$\mathbf{X}(t, \mathbf{x}) := \mathbf{X}(t; t^{k+1}, \mathbf{x}) \quad \text{et} \quad \varphi(t, \mathbf{x}) := \varphi(t; t^{k+1}, \mathbf{x}).$$

En formant la différence des expressions (3.4.23) et (3.4.24), on obtient

$$\|(\mathbf{X} - \varphi)(t^k, \cdot)\|_0 \leq \int_{t^k}^{t^{k+1}} \|\mathbf{u}(\mathbf{X}(s, \cdot), s) - \mathbf{u}^k(\varphi(s, \cdot))\|_0 ds.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{X} - \varphi)(t^k, \cdot)\|_0 &\leq \int_{t^k}^{t^{k+1}} ( \|\mathbf{u}(\mathbf{X}(s, \cdot), s) - \mathbf{u}(\mathbf{X}(s, \cdot), t^k)\|_0 \\ &\quad + \|\mathbf{u}(\mathbf{X}(s, \cdot), t^k) - \mathbf{u}(\varphi(s, \cdot), t^k)\|_0 \\ &\quad + \|\mathbf{u}(\varphi(s, \cdot), t^k) - \mathbf{u}^k(\varphi(s, \cdot), t^k)\|_0 ) ds. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que les jacobiens de  $\mathbf{X}(s, \cdot)$  et  $\varphi(s, \cdot)$  valent 1 presque partout dans  $\Omega$ , il vient

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{X} - \varphi)(t^k, \cdot)\|_0 &\leq \int_{t^k}^{t^{k+1}} \|\mathbf{u}(\cdot, s) - \mathbf{u}(\cdot, t^k)\|_0 ds \\ &\quad + \|\nabla \mathbf{u}(\cdot, t^k)\|_{[L^\infty(\Omega)]^2} \int_{t^k}^{t^{k+1}} \|(\mathbf{X} - \varphi)(s, \cdot)\|_0 ds \\ (3.4.25) \quad &\quad + \Delta t \|\mathbf{u}(\cdot, t^k) - \mathbf{u}^k\|_0. \end{aligned}$$

Par ailleurs, de la relation

$$\mathbf{u}(\cdot, t) - \mathbf{u}(\cdot, t^k) = \int_{t^k}^t \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\cdot, s) ds,$$

on déduit, pour tout  $t \in (t^k, t^{k+1})$ , que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}(\cdot, t) - \mathbf{u}(\cdot, t^k)\|_0 &\leq \int_{t^k}^{t^{k+1}} \left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\cdot, s) \right\|_0 ds \\ &\leq \sqrt{\Delta t} \left( \int_{t^k}^{t^{k+1}} \left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\cdot, s) \right\|_0^2 ds \right)^{1/2} \quad (\text{inégalité de Hölder}) \\ (3.4.26) \quad &= \sqrt{\Delta t} \left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right\|_{L^2(I_k, [L^2(\Omega)]^2)}. \end{aligned}$$

En combinant (3.4.25) et (3.4.26), on obtient

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{X} - \varphi)(t^k, \cdot)\|_0 &\leq \Delta t^{3/2} \left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right\|_{L^2(I_k, [L^2(\Omega)]^2)} + \Delta t \|\mathbf{u}(\cdot, t^k) - \mathbf{u}^k\|_0 \\ &\quad + \|\nabla \mathbf{u}(\cdot, t^k)\|_{[L^\infty(\Omega)]^2} \int_{t^k}^{t^{k+1}} \|(\mathbf{X} - \varphi)(s, \cdot)\|_0 ds. \end{aligned}$$

Par le Lemme de Gronwall, on a

$$(3.4.27) \quad \|(\mathbf{X} - \varphi)(t^k, \cdot)\|_0 \leq \Delta t \exp \left( \Delta t \|\nabla \mathbf{u}(\cdot, t^k)\|_{[L^\infty(\Omega)]^2} \right) \\ \times \left( \|\mathbf{u}(\cdot, t^k) - \mathbf{u}^k\|_0 + \sqrt{\Delta t} \left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right\|_{L^2(I_k, [L^2(\Omega)]^2)} \right),$$

ce qui termine la démonstration du Lemme 3.3.  $\square$

#### Démonstration de la Proposition 3.4

On pose désormais  $\mathbf{e}^k = \mathbf{u}(\cdot, t^k) - \mathbf{u}^k$ . On écrit la formulation mixte et lagrangienne des équations de Navier-Stokes en  $t = t^{k+1}$  :

$$(3.4.28) \quad \left( \frac{d}{dt} [\mathbf{u}(\mathbf{X}(t, \cdot), t)]|_{t=t^{k+1}}, \mathbf{v} \right) + a(\mathbf{u}(\cdot, t^{k+1}), \mathbf{v}) \\ + b(\mathbf{v}, p(\cdot, t^{k+1})) = (\mathbf{f}^{k+1}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in X,$$

$$(3.4.29) \quad b(\mathbf{u}(\cdot, t^{k+1}), q) = 0 \quad \forall q \in Y.$$

En faisant la différence de l'équation (3.4.28) avec (3.4.12) et en prenant  $\mathbf{v} = \mathbf{e}^{k+1} \in X$  comme fonction test, il vient

$$\begin{aligned} \left( \frac{d}{dt} [\mathbf{u}(\mathbf{X}(t, \cdot), t)]|_{t=t^{k+1}} - \frac{\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k \circ \mathbf{X}^k}{\Delta t}, \mathbf{e}^{k+1} \right) + \nu \|\nabla \mathbf{e}^{k+1}\|_0^2 \\ + b(\mathbf{e}^{k+1}, p(\cdot, t^{k+1}) - p^{k+1}) = 0. \end{aligned}$$

Or, d'après (3.4.13) et (3.4.29), on a  $b(\mathbf{e}^{k+1}, p(\cdot, t^{k+1}) - p^{k+1}) = 0$  et donc

$$(3.4.30) \quad \left( \frac{d}{dt} [\mathbf{u}(\mathbf{X}(t, \cdot), t)]|_{t=t^{k+1}} - \frac{\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k \circ \mathbf{X}^k}{\Delta t}, \mathbf{e}^{k+1} \right) + \nu \|\nabla \mathbf{e}^{k+1}\|_0^2 = 0.$$

Par ailleurs, pour tout  $\mathbf{x} \in \Omega$ , on a

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t^{k+1}) &= \mathbf{u}(\mathbf{X}(t^{k+1}, \mathbf{x}), t^{k+1}) \\ &= \mathbf{u}(\mathbf{X}(t^k, \mathbf{x}), t^k) + \Delta t \frac{d}{dt} [\mathbf{u}(\mathbf{X}(t, \mathbf{x}), t)]|_{t=t^{k+1}} \\ &\quad - \int_{t^k}^{t^{k+1}} \int_t^{t^{k+1}} \frac{d^2}{ds^2} [\mathbf{u}(\mathbf{X}(s, \mathbf{x}), s)] ds dt \end{aligned}$$

et donc

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{u}(\mathbf{X}(t, \cdot), t)]|_{t=t^{k+1}} = \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{u}(\cdot, t^{k+1}) - \mathbf{u}(\mathbf{X}(t^k, \cdot), t^k)) - \mathbf{R}_k$$

avec

$$(3.4.31) \quad \mathbf{R}_k = -\frac{1}{\Delta t} \int_{t^k}^{t^{k+1}} \int_t^{t^{k+1}} \frac{d^2}{ds^2} [\mathbf{u}(\mathbf{X}(s, \cdot), s)] ds dt.$$

Ainsi, l'équation (3.4.30) s'écrit

$$\left( \frac{\mathbf{u}(\cdot, t^{k+1}) - \mathbf{u}(\mathbf{X}(t^k, \cdot), t^k)}{\Delta t} - \frac{\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k \circ \mathbf{X}^k}{\Delta t}, \mathbf{e}^{k+1} \right) + \nu \|\nabla \mathbf{e}^{k+1}\|_0^2 = (\mathbf{R}_k, \mathbf{e}^{k+1})$$

et on obtient

$$(3.4.32) \quad \|\mathbf{e}^{k+1}\|_0^2 + \nu \Delta t \|\nabla \mathbf{e}^{k+1}\|_0^2 \leq (\|\mathbf{u}(\mathbf{X}(t^k, \cdot), t^k) - \mathbf{u}^k \circ \mathbf{X}^k\|_0 + \Delta t \|\mathbf{R}_k\|_0) \times \|\mathbf{e}^{k+1}\|_0.$$

On va estimer successivement les deux termes du membre de droite de l'inégalité précédente.

• Le reste  $\mathbf{R}_k$  défini par (3.4.31) peut être estimé de la façon suivante. On a

$$\begin{aligned} \|\mathbf{R}_k\|_0 &\leq \frac{1}{\Delta t} \int_{t^k}^{t^{k+1}} \int_t^{t^{k+1}} \left\| \frac{d^2}{ds^2} [\mathbf{u}(\mathbf{X}(s, \cdot), s)] \right\|_0 ds dt \\ &\leq \int_{t^k}^{t^{k+1}} \left\| \frac{d^2}{ds^2} [\mathbf{u}(\mathbf{X}(s, \cdot), s)] \right\|_0 ds \end{aligned}$$

et donc

$$(3.4.33) \quad \|\mathbf{R}_k\|_0 \leq \sqrt{\Delta t} \left\| \frac{d^2}{dt^2} (\mathbf{u} \circ \mathbf{X}) \right\|_{L^2(I_k, [L^2(\Omega)]^2)}.$$

• Par ailleurs, on a

$$(3.4.34) \quad \|\mathbf{u}(\mathbf{X}(t^k, \cdot), t^k) - \mathbf{u}^k \circ \mathbf{X}^k\|_0 \leq \|\mathbf{u}(\mathbf{X}(t^k, \cdot), t^k) - \mathbf{u}(\mathbf{X}^k, t^k)\|_0 + \|\mathbf{u}(\mathbf{X}^k, t^k) - \mathbf{u}^k(\mathbf{X}^k)\|_0$$

et

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}(\mathbf{X}(t^k, \cdot), t^k) - \mathbf{u}(\mathbf{X}^k, t^k)\|_0^2 &= \int_{\Omega} |\mathbf{u}(\mathbf{X}(t^k, \mathbf{x}), t^k) - \mathbf{u}(\mathbf{X}^k(\mathbf{x}), t^k)|^2 d\mathbf{x} \\ &\leq \|\nabla \mathbf{u}(\cdot, t^k)\|_{[L^\infty(\Omega)]^2}^2 \int_{\Omega} |\mathbf{X}(t^k, \mathbf{x}) - \mathbf{X}^k(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \end{aligned}$$

et par conséquent

$$(3.4.35) \quad \|\mathbf{u}(\mathbf{X}(t^k, \cdot), t^k) - \mathbf{u}(\mathbf{X}^k, t^k)\|_0 \leq \|\nabla \mathbf{u}(\cdot, t^k)\|_{[L^\infty(\Omega)]^2} \|\mathbf{X}(t^k, \cdot) - \mathbf{X}^k\|_0.$$

De plus, on a  $\|\mathbf{u}(\mathbf{X}^k, t^k) - \mathbf{u}^k(\mathbf{X}^k)\|_0 = \|\mathbf{u}(\cdot, t^k) - \mathbf{u}^k\|_0$  car  $\det \nabla \mathbf{X}^k = 1$  et donc

$$(3.4.36) \quad \|\mathbf{u}(\mathbf{X}^k, t^k) - \mathbf{u}^k(\mathbf{X}^k)\|_0 = \|\mathbf{e}^k\|_0.$$

En regroupant les estimations (3.4.33)–(3.4.36) dans (3.4.32), on obtient

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}^{k+1}\|_0^2 + \nu \Delta t \|\nabla \mathbf{e}^{k+1}\|_0^2 &\leq \left( \|\mathbf{e}^k\|_0 + C \|\mathbf{X}(t^k, \cdot) - \mathbf{X}^k\|_0 \right. \\ &\quad \left. + \Delta t^{3/2} \left\| \frac{d^2}{dt^2} (\mathbf{u} \circ \mathbf{X}) \right\|_{L^2(I_k, [L^2(\Omega)]^2)} \right) \|\mathbf{e}^{k+1}\|_0 \end{aligned}$$

En utilisant alors le Lemme 3.3, on obtient

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}^{k+1}\|_0^2 + \nu\Delta t \|\nabla \mathbf{e}^{k+1}\|_0^2 &\leq \|\mathbf{e}^k\|_0 \|\mathbf{e}^{k+1}\|_0 + C_1 \Delta t \|\mathbf{e}^k\|_0 \|\mathbf{e}^{k+1}\|_0 \\ &\quad + C_2 \Delta t^{3/2} \left( \left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right\|_{L^2(I_k, [L^2(\Omega)]^2)} \right. \\ &\quad \left. + \left\| \frac{d^2}{dt^2} (\mathbf{u} \circ \mathbf{X}) \right\|_{L^2(I_k, [L^2(\Omega)]^2)} \right) \|\mathbf{e}^{k+1}\|_0 \end{aligned}$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes positives indépendantes de  $k$  et  $\Delta t$ . On obtient ainsi

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}^{k+1}\|_0^2 + \nu\Delta t \|\nabla \mathbf{e}^{k+1}\|_0^2 &\leq \frac{1}{2} \|\mathbf{e}^k\|_0^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{e}^{k+1}\|_0^2 \\ &\quad + C\Delta t \left( \|\mathbf{e}^k\|_0 + \alpha_k \sqrt{\Delta t} \right) \|\mathbf{e}^{k+1}\|_0 \end{aligned}$$

avec

$$(3.4.37) \quad \alpha_k = \left( \left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right\|_{L^2(I_k, [L^2(\Omega)]^2)}^2 + \left\| \frac{d^2}{dt^2} (\mathbf{u} \circ \mathbf{X}) \right\|_{L^2(I_k, [L^2(\Omega)]^2)}^2 \right)^{1/2}.$$

Par conséquent, on a

$$\|\mathbf{e}^{k+1}\|_0^2 + 2\nu\Delta t \|\nabla \mathbf{e}^{k+1}\|_0^2 \leq \|\mathbf{e}^k\|_0^2 + C\Delta t \left( \|\mathbf{e}^k\|_0 + \alpha_k \sqrt{\Delta t} \right) \|\mathbf{e}^{k+1}\|_0.$$

Par application des inégalités de Poincaré et de Young, il vient

$$\|\mathbf{e}^{k+1}\|_0^2 + 2\nu\Delta t \|\nabla \mathbf{e}^{k+1}\|_0^2 \leq \|\mathbf{e}^k\|_0^2 + \nu\Delta t \|\nabla \mathbf{e}^{k+1}\|_0^2 + C \frac{\Delta t}{\nu} \left( \|\mathbf{e}^k\|_0^2 + \alpha_k^2 \Delta t \right)$$

d'où

$$(3.4.38) \quad \|\mathbf{e}^{k+1}\|_0^2 + \nu\Delta t \|\nabla \mathbf{e}^{k+1}\|_0^2 \leq \|\mathbf{e}^k\|_0^2 + C \frac{\Delta t}{\nu} \left( \|\mathbf{e}^k\|_0^2 + \Delta t \alpha_k^2 \right).$$

En sommant sur  $k = 0, \dots, m-1$  avec  $1 \leq m \leq n$ , on obtient

$$\|\mathbf{e}^m\|_0^2 + \nu\Delta t \sum_{k=1}^m \|\nabla \mathbf{e}^k\|_0^2 \leq \|\mathbf{e}^0\|_0^2 + C \frac{\Delta t}{\nu} \left( \sum_{k=0}^{m-1} \|\mathbf{e}^k\|_0^2 + \Delta t \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k^2 \right).$$

Or  $\sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k^2 \leq \left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right\|_{L^2(0, T; [L^2(\Omega)]^2)}^2 + \left\| \frac{d^2}{dt^2} (\mathbf{u} \circ \mathbf{X}) \right\|_{L^2(0, T; [L^2(\Omega)]^2)}^2$ . Par le Lemme de Gronwall, on obtient

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}^m\|_0^2 + \nu\Delta t \sum_{k=1}^m \|\nabla \mathbf{e}^k\|_0^2 &\leq \left( \|\mathbf{e}^0\|_0^2 + C' \frac{\Delta t^2}{\nu} \right) \exp \left( C \frac{\Delta t}{\nu} m \right) \\ &\leq \left( \|\mathbf{e}^0\|_0^2 + C' \frac{\Delta t^2}{\nu} \right) \exp \left( C \frac{T}{\nu} \right), \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration.  $\square$

Annexe : Eléments Finis pour les équations de  
Stokes (2D/3D)





## Eléments Finis pour les équations de Stokes

### A1. Introduction.

On considère un fluide visqueux s'écoulant lentement dans un endroit étroit ou autour d'un petit obstacle. Dans de telles conditions, les effets visqueux dominent les effets inertiels (faible nombre de Reynolds). L'écoulement du fluide est alors décrit par les équations de Stokes. On désigne par  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  le domaine (borné et régulier) occupé par le fluide et les inconnues des équations de Stokes sont la vitesse  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$  et la pression  $p = p(\mathbf{x})$  du fluide au point  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ . La vitesse est une fonction vectorielle  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$  et la pression  $p$  une fonction scalaire. Les équations de Stokes s'écrivent :

$$\begin{aligned} -\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u} &= 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

Le paramètre  $\nu > 0$  représente la viscosité (dynamique) du fluide et la fonction  $\mathbf{f}$  est donnée. On rappelle la définition des opérateurs différentiels apparaissant dans les équations de Stokes :

$$\begin{aligned} \nabla &= \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right), \quad \Delta \mathbf{u} = (\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3) \in \mathbb{R}^3, \\ \nabla \mathbf{u} &= \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq 3} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}), \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = \operatorname{trace}(\nabla \mathbf{u}) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

On écrit les équations de Stokes sous une forme équivalente, mais mieux adaptée notamment aux problèmes d'interaction fluide/structure. Dans ce but, on introduit le tenseur de Cauchy des contraintes

$$\sigma = \sigma(\mathbf{u}, p) = 2\nu D(\mathbf{u}) - p \mathbf{I}_d$$

où

$$D(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^\top) \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$$

est le tenseur *symétrique* des déformations. Les équations de Stokes s'écrivent alors

$$(1.1) \quad -\operatorname{div} \sigma = \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega$$

$$(1.2) \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

$$(1.3) \quad \mathbf{u} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$

La divergence du tenseur  $\sigma$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^3$  qui a pour composantes

$$(\operatorname{div} \sigma)_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}.$$

**Formulation variationnelle mixte.** On multiplie la relation (1.1) par une fonction  $\mathbf{v}$  régulière qui s'annule sur le bord  $\partial\Omega$ . En intégrant par partie, on obtient

$$\sum_{i,j} \int_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x}.$$

Puisque le tenseur  $\sigma$  est symétrique ( $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ ), on a  $\sum_{i,j} \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \sum_{i,j} \sigma_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$  et par conséquent

$$\sum_{i,j} \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \sum_{i,j} \sigma_{ij} D(\mathbf{v})_{ij}.$$

On note  $L_0^2(\Omega)$  l'espace des fonctions (scalaires) de carré intégrable et à moyenne nulle dans  $\Omega$ . On obtient alors la formulation variationnelle suivante

Trouver  $(\mathbf{u}, p) \in H_0^1(\Omega)^3 \times L_0^2(\Omega)$  tels que

$$(1.4) \quad 2\nu \int_{\Omega} D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^3$$

$$(1.5) \quad \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{u}) q \, d\mathbf{x} = 0 \quad \forall q \in L_0^2(\Omega).$$

La notation " : " désigne le double produit scalaire pour les matrices,  $A : B = \sum_{k,l} a_{kl} b_{kl}$ .

*Remarque 1.* Dans la relation (1.5), il est équivalent de prendre des fonctions test  $q$  dans  $L^2(\Omega)$  (c'est-à-dire non nécessairement à moyenne nulle). Cependant,  $L_0^2(\Omega)$  est le "bon" espace pour la pression. Dans les équations de Stokes, la pression est connue à une constante près. Choisir la moyenne nulle revient à fixer la constante.

*Remarque 2.* Compte tenu du fait que la vitesse  $\mathbf{u}$  vérifie la relation d'incompressibilité  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$  (au sens faible), on a

$$2 \int_{\Omega} D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \nabla(\mathbf{u}) : \nabla(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x},$$

ce qui simplifie les calculs. Cependant, en vue d'applications aux problèmes de fluides-structures, on préfère travailler avec la formulation (1.4).  $\square$

En introduisant les formes  $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 2\nu \int_{\Omega} D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x}$  et  $b(\mathbf{u}, q) = - \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{u}) q \, d\mathbf{x}$ , avec les espaces  $X = H_0^1(\Omega)^3$  et  $Y = L_0^2(\Omega)$ , la formulation variationnelle s'écrit

Trouver  $(\mathbf{u}, p) \in X \times Y$  tels que

$$(1.6) \quad a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in X$$

$$(1.7) \quad b(\mathbf{u}, q) = 0 \quad \forall q \in Y.$$

On peut montrer que ce type de problème est bien posé si les formes  $a$  et  $b$  sont continues, si  $a$  est coercive et si  $b$  vérifie une condition 'inf-sup'.

**Formulation mixte approchée.** On considère des espaces approchés  $X_h \subset X = H_0^1(\Omega)^3$  et  $Y_h \subset Y = L_0^2(\Omega)$ , tous les deux de dimension finie. On cherche des approximations  $\mathbf{u}_h \simeq \mathbf{u}$  et  $p_h \simeq p$  dans les espaces  $X_h$  et  $Y_h$  respectivement. La formulation mixte approchée s'écrit

Trouver  $(\mathbf{u}_h, p_h) \in X_h \times Y_h$  tels que

$$(1.8) \quad 2\nu \int_{\Omega} D(\mathbf{u}_h) : D(\mathbf{v}_h) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} p_h \operatorname{div} \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{v}_h \in X_h$$

$$(1.9) \quad \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{u}_h) q_h \, d\mathbf{x} = 0 \quad \forall q_h \in Y_h.$$

Pour que la formulation approchée soit bien posée, les espaces  $X_h$  et  $Y_h$  doivent satisfaire une condition 'inf-sup' :

Il existe  $\beta > 0$  indépendant de  $h$  tel que  $\forall q_h \in Y_h, \exists \mathbf{v}_h \in X_h, \mathbf{v}_h \neq 0$  tel que

$$b(\mathbf{v}_h, q_h) \geq \beta \|v_h\|_X \|q_h\|_Y.$$

*Contre-exemples.* Si on choisit des Eléments Finis  $\mathbb{P}_1$  (vitesse) /  $\mathbb{P}_1$  (pression) et plus généralement  $\mathbb{P}_k$  /  $\mathbb{P}_k$ , la condition 'inf-sup' n'est pas satisfaite en général. On a généralement un phénomène de "verrouillage numérique" sans aucune chance de convergence...

## Exemples d'Eléments Finis

### A2. Cas d'une triangulation de $\Omega$ .

On considère une triangulation  $\mathcal{T}_h$  de  $\Omega$  par des triangles (2D) ou des tétraèdres (3D). On choisit les espaces d'Eléments Finis suivants

$$\begin{array}{c} \mathbb{P}_{k+1} \\ \text{(vitesse)} \end{array} / \begin{array}{c} \mathbb{P}_k \\ \text{(pression)} \end{array}$$

L'espace  $\mathbb{P}_k$  est l'espace des polynômes  $p$  qui sont (globalement) de degré au plus  $k$ , c'est-à-dire qui s'écrivent sous la forme

$$p(x_1, \dots, x_N) = \sum_{0 \leq k_1 + \dots + k_N \leq k} \alpha_{k_1, \dots, k_N} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_N^{k_N}$$

Les espaces  $\mathbb{P}_{k+1}/\mathbb{P}_k$  satisfont la condition 'inf-sup'.

#### A2.1. Eléments Finis $\mathbb{P}_1$ .

L'espace considéré est  $V_h = \{v \in C^0(\bar{\Omega}) \mid v|_K \in \mathbb{P}_1, \forall K \in \mathcal{T}_h\}$ .

##### i) Cas 2D.

On notera  $(x, y)$ , au lieu de  $(x_1, x_2)$ , les coordonnées d'un vecteur de  $\mathbb{R}^2$ .

Les fonctions de base  $\mathbb{P}_1$  sont  $1, x, y$ .

★ Transformation locale. On désigne par  $\hat{K}$  le triangle de référence dont les sommets sont  $\hat{a}_1 = (0, 0)$ ,  $\hat{a}_2 = (1, 0)$  et  $\hat{a}_3 = (0, 1)$ . Soit  $K$  un triangle quelconque de la triangulation  $\mathcal{T}_h$ . Les coordonnées des sommets  $a_i$  de  $K$  sont notées  $(x_i, y_i)$  pour  $i = 1, 2, 3$ . On considère alors la transformation affine  $F_K$  qui transforme le triangle de référence  $\hat{K}$  en le triangle  $K$  i.e.  $F_K(\hat{K}) = K$ . (cf. Figure 1).

La transformation  $F_K$  est définie par  $F_K(\hat{\mathbf{x}}) = B_K \hat{\mathbf{x}} + b_K$  avec

$$(2.1) \quad B_K = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix}, \quad b_K = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

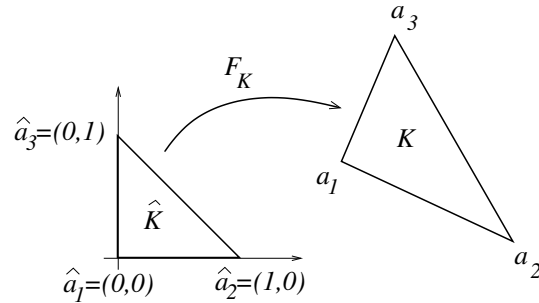


FIGURE 1. Triangle de référence - Transformation affine 2D.

Les coordonnées barycentriques  $\hat{\lambda}_j$  associées au triangle de référence  $\hat{K}$  sont données par

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \hat{\lambda}_1 &= 1 - (\hat{x} + \hat{y}) \\ \hat{\lambda}_2 &= \hat{x} \\ \hat{\lambda}_3 &= \hat{y} \end{aligned}$$

Pour calculer les intégrales sur  $\Omega$ , on les décompose en une somme sur tous les triangles. On calcule les intégrales sur  $K$  en utilisant le changement de variables  $F_K$  associé à chaque triangle  $K$  ainsi que les formules d'intégration rappelées ci-dessous. On obtient ainsi des matrices élémentaires associées au triangle de référence  $\hat{K}$ .

★ *Formule d'intégration des coordonnées barycentriques sur un triangle  $K$*  : pour tout entier  $k_1, k_2, k_3$ , les coordonnées barycentriques  $\lambda_i, i = 1, 2, 3$ , associées à un triangle  $K$ , vérifient

$$(2.3) \quad \int_K \lambda_1^{k_1} \lambda_2^{k_2} \lambda_3^{k_3} d\mathbf{x} = 2|K| \frac{k_1! k_2! k_3!}{(2 + k_1 + k_2 + k_3)!}.$$

★ *Formule d'intégration numérique sur un triangle  $K$*  : A la place de la formule (2.3), on peut aussi utiliser des formules d'intégration numérique pour calculer les matrices élémentaires.

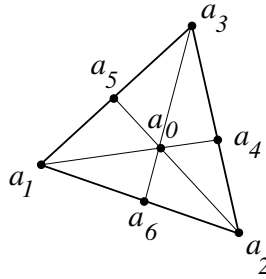


FIGURE 2. Points pour l'intégration numérique dans un triangle.

Les sommets du triangle  $K$  sont notés  $a_1, a_2, a_3$ . Les points milieux des arêtes sont notés  $a_4, a_5, a_6$  et le point  $a_0$  désigne le barycentre du triangle (cf. Figure 2) .

- Formules exactes pour  $\mathbb{P}_1$  : 
$$\int_K f(\mathbf{x})d\mathbf{x} \simeq |K|f(a_0),$$
$$\int_K f(\mathbf{x})d\mathbf{x} \simeq \frac{|K|}{3} \sum_{i=1}^3 f(a_i)$$
- Formule exacte pour  $\mathbb{P}_2$  : 
$$\int_K f(\mathbf{x})d\mathbf{x} \simeq \frac{|K|}{3} \sum_{i=4}^6 f(a_i)$$
- Formule exacte pour  $\mathbb{P}_3$  : 
$$\int_K f(\mathbf{x})d\mathbf{x} \simeq \frac{|K|}{60} \left( 27f(a_0) + 3 \sum_{i=1}^3 f(a_i) + 8 \sum_{i=4}^6 f(a_i) \right)$$

## ii) Cas 3D.

On notera  $(x, y, z)$  au lieu de  $(x_1, x_2, x_3)$  les coordonnées d'un vecteur de  $\mathbb{R}^3$ .

Les fonctions de base  $\mathbb{P}_1$  sont  $1, x, y, z$ .

★ Transformation locale. On désigne par  $\hat{K}$  le tétraèdre de référence dont les sommets sont  $\hat{a}_1 = (0, 0, 0)$ ,  $\hat{a}_2 = (1, 0, 0)$ ,  $\hat{a}_3 = (0, 1, 0)$  et  $\hat{a}_4 = (0, 0, 1)$ . Soit  $K$  un tétraèdre quelconque de la triangulation  $\mathcal{T}_h$ . Les coordonnées des sommets  $a_i$  de  $K$  sont notées  $(x_i, y_i, z_i)$  pour  $i = 1, \dots, 4$ . La transformation

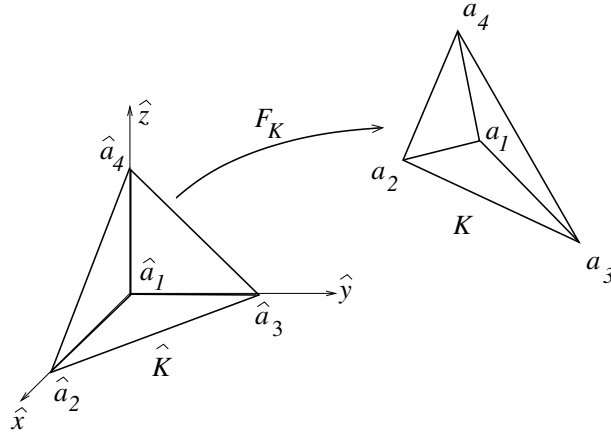


FIGURE 3. Tétraèdre de référence - Transformation affine 3D.

affine  $F_K$  qui transforme le tétraèdre de référence  $\hat{K}$  en le tétraèdre  $K$  de la triangulation i.e. telle que  $F_K(\hat{K}) = K$  (cf. Figure 3), est définie par  $F_K(\hat{\mathbf{x}}) = B_K \hat{\mathbf{x}} + b_K$  avec

$$(2.4) \quad B_K = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 & y_4 - y_1 \\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1 & z_4 - z_1 \end{pmatrix}, \quad b_K = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}.$$

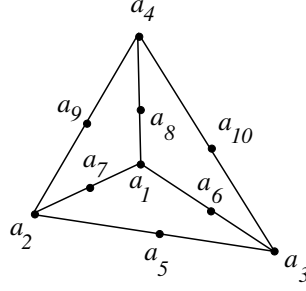


FIGURE 4. Points d'intégration numérique dans un tétraèdre.

Les coordonnées barycentriques  $\hat{\lambda}_j$  associées au tétraèdre de référence  $\hat{K}$  sont données par

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}_1 &= 1 - (\hat{x} + \hat{y} + \hat{z}) \\ \hat{\lambda}_2 &= \hat{x} \\ \hat{\lambda}_3 &= \hat{y} \\ \hat{\lambda}_4 &= \hat{z}\end{aligned}$$

Dans le cas 3D, les formules d'intégration deviennent :

★ *Formule d'intégration des coordonnées barycentriques sur un tétraèdre  $K$*  : pour tout entier  $k_i, i = 1, \dots, 4$ , les coordonnées barycentriques  $\lambda_i, i = 1, \dots, 4$ , associées à un tétraèdre  $K$ , vérifient

$$(2.5) \quad \int_K \lambda_1^{k_1} \lambda_2^{k_2} \lambda_3^{k_3} \lambda_4^{k_4} d\mathbf{x} = 6|K| \frac{k_1! k_2! k_3! k_4!}{(3 + k_1 + k_2 + k_3 + k_4)!}.$$

★ *Formule d'intégration numérique sur un tétraèdre  $K$*  : A la place de la formule (2.5), on peut aussi utiliser des formules d'intégration numérique pour calculer les matrices élémentaires.

Les sommets du tétraèdre  $K$  sont notés  $a_1, a_2, a_3, a_4$ . Les points milieux des arêtes sont notés  $a_5, \dots, a_{10}$  et le point  $a_0$  désigne le barycentre du tétraèdre (cf. Figure 4). On définit un repère local lié au tétraèdre  $K$  : le repère  $(a_1, \overrightarrow{a_1 a_2}, \overrightarrow{a_1 a_3}, \overrightarrow{a_1 a_4})$  qui a pour origine le sommet  $a_1$ . On note alors  $(\alpha, \beta, \gamma)$  les coordonnées d'un point dans ce repère<sup>3</sup>. Ainsi, le barycentre  $a_0$  du tétraèdre a pour coordonnées  $(1/4, 1/4, 1/4)$ , le point milieu  $a_5$  a pour coordonnées  $(1/2, 1/2, 0)$ , etc...

- *Formules exactes pour  $\mathbb{P}_1$*  : 
$$\int_K f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \simeq |K| f(a_0),$$
$$\int_K f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \simeq \frac{|K|}{4} \sum_{i=1}^4 f(a_i)$$

3. Ces coordonnées ne sont rien d'autres que les coordonnées barycentriques :  $\alpha = \lambda_2, \beta = \lambda_3, \gamma = \lambda_4$ . La coordonnée barycentrique  $\lambda_1$  s'obtient par  $\lambda_1 = 1 - (\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)$ .

- *Formule exacte pour  $\mathbb{P}_2$*  :  $\int_K f(\mathbf{x})d\mathbf{x} \simeq \frac{|K|}{20} \left( -\sum_{i=1}^4 f(a_i) + 4 \sum_{i=5}^{10} f(a_i) \right)$ .

Il existe aussi des formules d'ordre supérieur<sup>4</sup>.

- *Autre formule exacte pour  $\mathbb{P}_2$*  :  $\int_K f(\mathbf{x})d\mathbf{x} \simeq \frac{|K|}{4} \sum_{i=1}^4 f(d_i)$ ,

où les coordonnées des points  $d_i$  sont données dans le tableau suivant :

	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
$d_1$	$a$	$a$	$a$
$d_2$	$a$	$a$	$b$
$d_3$	$a$	$b$	$a$
$d_4$	$b$	$a$	$a$

avec  $a = \frac{5 - \sqrt{5}}{20}$  et  $b = \frac{5 + 3\sqrt{5}}{20}$ .

- *Formule exacte pour  $\mathbb{P}_3$*  :  $\int_K f(\mathbf{x})d\mathbf{x} \simeq \frac{|K|}{20} \left( -16f(a_0) + 9 \sum_{i=1}^4 f(e_i) \right)$ ,

où les coordonnées des points  $e_i$  sont données dans le tableau suivant :

	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
$e_1$	$1/6$	$1/6$	$1/6$
$e_2$	$1/6$	$1/6$	$1/2$
$e_3$	$1/6$	$1/2$	$1/6$
$e_4$	$1/2$	$1/6$	$1/6$

*Remarque* : Le volume d'un tétraèdre vaut  $|K| = \frac{1}{6} |\det B_K|$  où  $B_K$  est donnée par (2.4).

---

4. cf. Dhatt et Touzot, *Une présentation de la méthode des Eléments Finis*, Paris, Maloine, 1981

**A2.2. Eléments Finis  $\mathbb{P}_2$ .**

L'espace considéré est  $V_h = \{v \in C^0(\overline{\Omega}) \mid v|_K \in \mathbb{P}_2, \forall K \in \mathcal{T}_h\}$ .

**i) Cas 2D.**

Les fonctions de base  $\mathbb{P}_2$  (canoniques) sont  $1, x, y, x^2, y^2, xy$ .

Il y a 6 degrés de liberté par triangle : les 3 sommets  $(a_1, a_2, a_3)$  et les 3 milieux d'arêtes  $(a_4, a_5, a_6)$ . Les fonctions de base  $\mathbb{P}_2$  associée au triangle de référence  $\hat{K}$  (cf. Figure 5) sont données par :

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \hat{l}_i &= \hat{\lambda}_i(2\hat{\lambda}_i - 1), \quad i = 1, 2, 3, \\ \hat{l}_4 &= 4\hat{\lambda}_2\hat{\lambda}_3 \\ \hat{l}_5 &= 4\hat{\lambda}_1\hat{\lambda}_3 \\ \hat{l}_6 &= 4\hat{\lambda}_1\hat{\lambda}_2 \end{aligned}$$

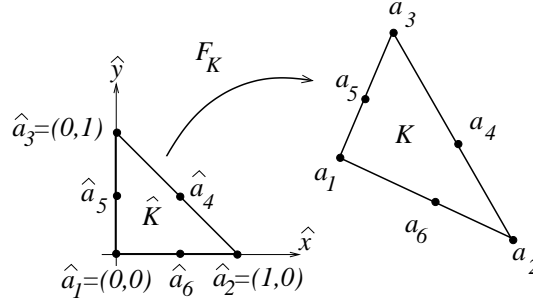


FIGURE 5. Triangle de référence  $\mathbb{P}_2$ .

**ii) Cas 3D.**

Les fonctions de base  $\mathbb{P}_2$  (canoniques) sont  $1, x, y, z, x^2, y^2, z^2, xy, xz, yz$ .

Il y a 10 degrés de liberté par tétraèdre : les 4 sommets  $(a_1, \dots, a_4)$  et les 6 milieux d'arêtes  $(a_5, \dots, a_{10})$ . Les fonctions de base  $\mathbb{P}_2$  associée au triangle de référence  $\hat{K}$  (cf. Figure 4) sont données par :

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \hat{l}_i &= \hat{\lambda}_i(2\hat{\lambda}_i - 1), \quad i = 1, \dots, 4, \\ \hat{l}_5 &= 4\hat{\lambda}_2\hat{\lambda}_3 \\ \hat{l}_6 &= 4\hat{\lambda}_1\hat{\lambda}_3 \\ \hat{l}_7 &= 4\hat{\lambda}_1\hat{\lambda}_2 \\ \hat{l}_8 &= 4\hat{\lambda}_1\hat{\lambda}_4 \\ \hat{l}_9 &= 4\hat{\lambda}_2\hat{\lambda}_4 \\ \hat{l}_{10} &= 4\hat{\lambda}_3\hat{\lambda}_4 \end{aligned}$$

**A3. Cas d'une quadrangulation de  $\Omega$ .**

On considère une quadrangulation  $\mathcal{T}_h$  de  $\Omega$  par des parallélogrammes (2D) ou des parallépipèdes (3D). On choisit les espaces d'Eléments Finis suivants

$$\begin{array}{c} \mathbb{Q}_{k+1} \\ \text{(vitesse)} \end{array} / \begin{array}{c} \mathbb{Q}_k \\ \text{(pression)} \end{array}$$



L'espace  $\mathbb{Q}_k$  est l'espace des polynômes  $p$  qui sont de degré au plus  $k$  en chacune des variables, c'est-à-dire qui s'écrivent sous la forme

$$p(x_1, \dots, x_N) = \sum_{0 \leq k_1, \dots, k_N \leq k} \alpha_{k_1, \dots, k_N} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_N^{k_N}$$

On a  $\mathbb{P}_k \subset \mathbb{Q}_k \subset \mathbb{P}_{Nk}$ . Les espaces  $\mathbb{Q}_{k+1}/\mathbb{Q}_k$  satisfont la condition 'inf-sup'.

### A3.1. Éléments Finis $\mathbb{Q}_1$ .

L'espace considéré est  $V_h = \{v \in C^0(\bar{\Omega}) \mid v|_K \in \mathbb{Q}_1, \forall K \in \mathcal{T}_h\}$ .

#### i) Cas 2D.

Les fonctions de base  $\mathbb{Q}_1$  sont  $1, x, y, xy$ .

Il y a 4 degrés de liberté par parallélogramme : les 4 sommets  $a_1, \dots, a_4$  du parallélogramme.

★ *Transformation locale.* L'élément de référence est le carré unité  $\hat{K} = [0, 1] \times [0, 1]$ . La transformation affine  $F_K$  qui transforme l'élément de référence  $\hat{K}$  en le parallélogramme  $K$  (cf. Fig. 6), a la même forme que (2.1). Avec la numérotation des sommets de la Figure 6, la matrice  $B_K$  de la transformation affine vaut

$$(3.1) \quad B_K = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_4 - y_1 \end{pmatrix}.$$

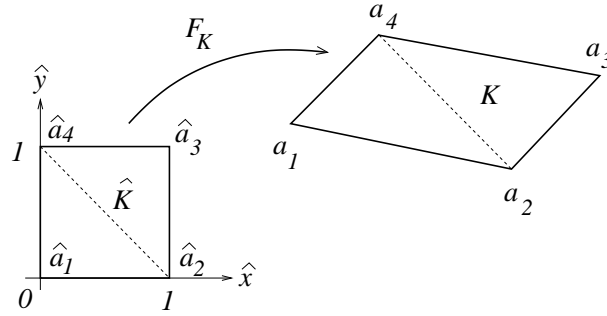


FIGURE 6. Élément de référence  $\mathbb{Q}_1$ .

Les coordonnées barycentriques associées à l'élément de référence  $\hat{K}$  sont données par :

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \hat{\lambda}_1 &= (1 - \hat{x})(1 - \hat{y}) \\ \hat{\lambda}_2 &= \hat{x}(1 - \hat{y}) \\ \hat{\lambda}_3 &= \hat{x}\hat{y} \\ \hat{\lambda}_4 &= (1 - \hat{x})\hat{y} \end{aligned}$$

*Cas particulier.* Lorsque le domaine  $\Omega$  est un rectangle, la quadrangulation est composée de rectangles et la matrice  $B_K$  de la transformation affine  $F_K$  devient

$$(3.3) \quad B_K = \begin{pmatrix} h_x^K & 0 \\ 0 & h_y^K \end{pmatrix}$$

avec  $h_x^K = x_2 - x_1$  et  $h_y^K = y_4 - y_1$ .

ii) **Cas 3D.**

Les fonctions de base  $\mathbb{Q}_1$  sont  $1, x, y, z, xy, xz, yz, xyz$ .

Il y a 8 degrés de liberté par parallépipède : les 8 sommets  $a_1, \dots, a_8$  du parallépipède.

★ Transformation locale. L'élément de référence est le cube unité  $\hat{K} = [0, 1]^3$ .

La transformation affine  $F_K$  qui transforme l'élément de référence  $\hat{K}$  en le parallépipède  $K$  (cf. Fig. 7), est donnée par la même forme que (2.4). Avec la numérotation des sommets selon la Figure 7, la matrice  $B_K$  de la transformation affine vaut

$$(3.4) \quad B_K = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_4 - x_1 & x_5 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_4 - y_1 & y_5 - y_1 \\ z_2 - z_1 & z_4 - z_1 & z_5 - z_1 \end{pmatrix}.$$

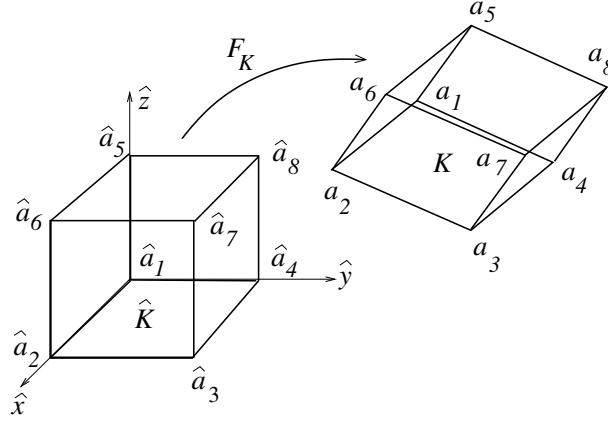


FIGURE 7. Élément de référence  $\mathbb{Q}_1$ .

Les coordonnées barycentriques associées à l'élément de référence  $\hat{K}$  sont données par :

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \hat{\lambda}_1 &= (1 - \hat{x})(1 - \hat{y})(1 - \hat{z}) \\ \hat{\lambda}_2 &= \hat{x}(1 - \hat{y})(1 - \hat{z}) \\ \hat{\lambda}_3 &= \hat{x}\hat{y}(1 - \hat{z}) \\ \hat{\lambda}_4 &= (1 - \hat{x})\hat{y}(1 - \hat{z}) \\ \hat{\lambda}_5 &= (1 - \hat{x})(1 - \hat{y})\hat{z} \\ \hat{\lambda}_6 &= \hat{x}(1 - \hat{y})\hat{z} \\ \hat{\lambda}_7 &= \hat{x}\hat{y}\hat{z} \\ \hat{\lambda}_8 &= (1 - \hat{x})\hat{y}\hat{z} \end{aligned}$$

*Cas particulier.* Lorsque le domaine  $\Omega$  est un parallépipède rectangle, la quadrangulation est composée de parallépipèdes rectangles et la matrice  $B_K$  de la transformation affine  $F_K$  devient

$$(3.6) \quad B_K = \begin{pmatrix} h_x^K & 0 & 0 \\ 0 & h_y^K & 0 \\ 0 & 0 & h_z^K \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} h_x^K = x_2 - x_1 \\ h_y^K = y_4 - y_1 \\ h_z^K = z_5 - z_1. \end{cases}$$

**A3.2. Eléments Finis  $\mathbb{Q}_2$ .**

L'espace considéré est  $V_h = \{v \in C^0(\overline{\Omega}) \mid v|_K \in \mathbb{Q}_2, \forall K \in \mathcal{T}_h\}$ .

**i) Cas 2D.**

Les fonctions de base  $\mathbb{Q}_2$  (canoniques) sont  $1, x, y, xy, x^2, y^2, x^2y, xy^2, x^2y^2$ .

Il y a 9 degrés de liberté par parallélogramme : les 4 sommets  $a_1, \dots, a_4$ , les 4 points milieux  $a_5, \dots, a_8$  et le barycentre  $a_9$  du parallélogramme.

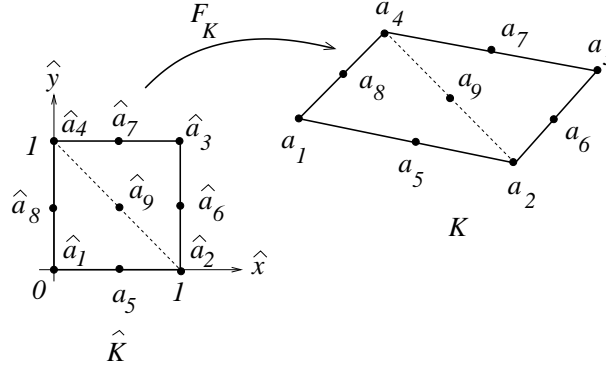


FIGURE 8. Elément de référence  $\mathbb{Q}_2$ .

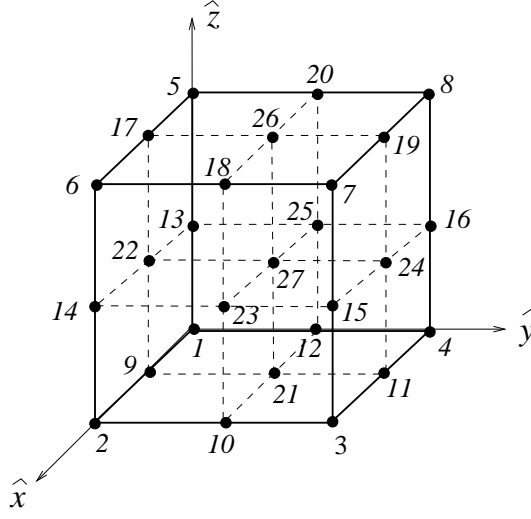
La matrice  $B_K$  de la transformation affine  $F_K$  qui transforme le carré unité  $\hat{K}$  de référence en le parallélogramme  $K$ , est donnée par (3.1). Les fonctions de base de  $V_h$  associées à l'élément de référence  $\hat{K}$  sont :

$$\begin{aligned}
 \hat{l}_1 &= (1 - \hat{x})(1 - 2\hat{x})(1 - \hat{y})(1 - 2\hat{y}) \\
 \hat{l}_2 &= \hat{x}(2\hat{x} - 1)(1 - \hat{y})(1 - 2\hat{y}) \\
 \hat{l}_3 &= \hat{x}(2\hat{x} - 1)\hat{y}(2\hat{y} - 1) \\
 \hat{l}_4 &= -(1 - \hat{x})(2\hat{x} - 1)\hat{y}(2\hat{y} - 1) \\
 \hat{l}_5 &= -4\hat{x}(1 - \hat{x})(1 - \hat{y})(2\hat{y} - 1) \\
 \hat{l}_6 &= 4\hat{x}(2\hat{x} - 1)\hat{y}(1 - \hat{y}) \\
 \hat{l}_7 &= 4\hat{x}(1 - \hat{x})\hat{y}(2\hat{y} - 1) \\
 \hat{l}_8 &= -4(1 - \hat{x})(2\hat{x} - 1)\hat{y}(1 - \hat{y}) \\
 \hat{l}_9 &= 16\hat{x}(1 - \hat{x})\hat{y}(1 - \hat{y})
 \end{aligned}
 \tag{3.7}$$

**ii) Cas 3D.**

Les fonctions de base  $\mathbb{Q}_2$  canoniques sont  $1, x, y, xy, x^2, y^2, x^2y, xy^2, x^2y^2, z, zx, zy, zxy, zx^2, zy^2, zx^2y, zxy^2, zx^2y^2, z^2, z^2x, z^2y, z^2xy, z^2x^2, z^2y^2, z^2x^2y, z^2xy^2, z^2x^2y^2$ .

Il y a 27 degrés de liberté par parallépipède : on coupe le parallépipède en 8 parallépipèdes égaux (cf. Fig. 9). On numérote les degrés de liberté dans l'ordre suivant (4 étapes) : sommets/milieux des arêtes/milieux des faces/centre du cube. A chaque étape, on part de  $x = y = z = 0$  et on fait croître  $z$ . De cette façon les 8 sommets du cube sont numérotés de  $\hat{a}_1$  à  $\hat{a}_8$ , les 12 milieux d'arêtes de  $\hat{a}_9$  à  $\hat{a}_{20}$ , les 6 milieux des faces de  $\hat{a}_{21}$  à  $\hat{a}_{26}$  et enfin le centre du cube est numéroté  $\hat{a}_{27}$ .

FIGURE 9. Élément de référence  $Q_2$ .

La matrice  $B_K$  de la transformation affine  $F_K$  qui transforme le carré unité  $\hat{K}$  de référence en le parallélogramme  $K$ , est donnée par (3.4). Les fonctions de base de  $V_h$  associées à l'élément de référence  $\hat{K}$  sont :

$$\begin{aligned}
 \hat{l}_1 &= (1 - \hat{x})(1 - 2\hat{x})(1 - \hat{y})(1 - 2\hat{y})(1 - \hat{z})(1 - 2\hat{z}) \\
 \hat{l}_2 &= -\hat{x}(1 - 2\hat{x})(1 - \hat{y})(1 - 2\hat{y})(1 - \hat{z})(1 - 2\hat{z}) \\
 \hat{l}_3 &= \hat{x}(1 - 2\hat{x})\hat{y}(1 - 2\hat{y})(1 - \hat{z})(1 - 2\hat{z}) \\
 &\vdots \\
 \hat{l}_{27} &= 64 \hat{x}(1 - \hat{x})\hat{y}(1 - \hat{y})\hat{z}(1 - \hat{z})
 \end{aligned}
 \tag{3.8}$$

#### A4. Système linéaire (3D).

Soit  $(\phi^{(j)})$  une base de  $X_h \subset X = H_0^1(\Omega)^3$  et  $(w^{(l)})$  une base de  $Y_h \subset Y = L^2(\Omega)$ . On décompose  $X_h = V_h \times V_h \times V_h$  où  $V_h \subset H_0^1(\Omega)$  est l'espace d'approximation pour chacune des composantes de la vitesse. On note  $(\varphi^{(j)})$  une base de  $V_h$ . On a donc les décompositions suivantes

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}_h &= \sum \mathbf{u}^{(i)} \varphi^{(i)} \text{ avec } \mathbf{u}^{(i)} = (u_1^{(i)}, u_2^{(i)}, u_3^{(i)})^\top \in \mathbb{R}^3, \\
 p_h &= \sum_l p^{(l)} w^{(l)}.
 \end{aligned}$$

Avec les fonctions tests  $\mathbf{v}_h = \begin{pmatrix} \varphi^{(j)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , puis  $\mathbf{v}_h = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi^{(j)} \\ 0 \end{pmatrix}$  et enfin  $\mathbf{v}_h = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varphi^{(j)} \end{pmatrix}$ , le problème approché (1.8),(1.9) devient

$$(4.1) \quad A\mathcal{U}_h + B P_h = F_h$$

$$(4.2) \quad B^\top \mathcal{U}_h = 0$$

où la matrice symétrique  $A$  est donnée par

$$(4.3) \quad A = \nu \begin{pmatrix} \sum_{l=1}^3 W^{l,l} + W^{1,1} & (W^{1,2})^\top & (W^{1,3})^\top \\ W^{1,2} & \sum_{l=1}^3 W^{l,l} + W^{2,2} & (W^{2,3})^\top \\ W^{1,3} & W^{2,3} & \sum_{l=1}^3 W^{l,l} + W^{3,3} \end{pmatrix}$$

avec  $W_{i,j}^{k,l} = \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi^{(j)}}{\partial x_l} d\mathbf{x}$  et  $B = \begin{pmatrix} B^{(1)} \\ B^{(2)} \\ B^{(3)} \end{pmatrix}$  avec  $B_{ij}^{(l)} = \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial x_l} w^{(j)} d\mathbf{x}$ .

Le second membre vaut  $F_h = \begin{pmatrix} F^{(1)} \\ F^{(2)} \\ F^{(3)} \end{pmatrix}$  avec  $F_j^{(l)} = \int_{\Omega} f_l \varphi^{(j)} d\mathbf{x}$ .

Les inconnues sont  $\mathcal{U}_h = (\dots u_1^{(i)} \dots | \dots u_2^{(i)} \dots | \dots u_3^{(i)} \dots)^\top$ ,  $P_h = (\dots p^{(l)} \dots)^\top$ .

Sous forme matricielle, le système linéaire s'écrit

$$(4.4) \quad \begin{pmatrix} A & B \\ B^\top & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{U}_h \\ P_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_h \\ 0 \end{pmatrix}.$$

*Remarque.* Compte tenu d'une remarque déjà faite, on a (car  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ )

$$2 \int_{\Omega} D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \nabla(\mathbf{u}) : \nabla(\mathbf{v}) d\mathbf{x},$$

Dans ces conditions, le système (4.1)-(4.2) est équivalent au système obtenu avec

$$A = \nu \begin{pmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix} \text{ avec } D = \sum_{l=1}^3 W^{l,l}.$$

## A5. Matrices élémentaires.

Les intégrales sur le domaine  $\Omega$  sont déterminées en calculant la contribution sur chaque élément  $K$  (triangle, tétraèdre, parallélogramme, parallépipède) de la triangulation/quadrangulation  $\mathcal{T}_h$  de  $\Omega$ .

### A5.1. Matrices de rigidité.

On doit calculer les matrices élémentaires de rigidité :

$$W_{i,j}^{k,l} = \int_K \frac{\partial l_i}{\partial x_k} \frac{\partial l_j}{\partial x_l} d\mathbf{x}$$

où  $l_i$  sont les fonctions de base de  $V_h$  associées à l'élément  $K$ . Pour déterminer ces intégrales, on se ramène à l'élément de référence  $\hat{K}$  en effectuant un changement de variable dans l'intégrale, avec la transformation affine

$$F_K(\hat{\mathbf{x}}) = B_K \hat{\mathbf{x}} + b_K$$

qui transforme  $\hat{K}$  en  $K$ . Etudions le résultat de ce changement de variable sur la dérivée d'une fonction. On effectue les calculs dans  $\mathbb{R}^N$  avec  $N \geq 1$ . Soit  $\hat{\mathbf{x}} \in \hat{K}$  et

$\hat{v}$  une fonction définie sur  $\hat{K}$ . On note  $\mathbf{x} = F_K(\hat{\mathbf{x}})$  et  $v(\mathbf{x}) = \hat{v}(\hat{\mathbf{x}}) = \hat{v} \circ F_K^{-1}(\mathbf{x})$ . En dérivant la relation  $\hat{v}(\hat{\mathbf{x}}) = v(\mathbf{x})$  avec  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N) = F(\hat{\mathbf{x}})$ , on obtient

$$(5.1) \quad \hat{\nabla} \hat{v}(\hat{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} \partial_{\hat{x}_1} \hat{v}(\hat{\mathbf{x}}) \\ \vdots \\ \partial_{\hat{x}_N} \hat{v}(\hat{\mathbf{x}}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} v(\mathbf{x}) \frac{\partial x_1}{\partial \hat{x}_1} + \dots + \partial_{x_N} v(\mathbf{x}) \frac{\partial x_N}{\partial \hat{x}_1} \\ \vdots \\ \partial_{x_1} v(\mathbf{x}) \frac{\partial x_1}{\partial \hat{x}_N} + \dots + \partial_{x_N} v(\mathbf{x}) \frac{\partial x_N}{\partial \hat{x}_N} \end{pmatrix} = [DF_K(\hat{\mathbf{x}})]^\top \nabla v(\mathbf{x})$$

où  $DF_K(\hat{\mathbf{x}})$  représente la matrice jacobienne de  $F_K$ . On a

$$DF_K = B_K,$$

de sorte qu'en inversant la relation (5.1), on obtient

$$(5.2) \quad \nabla v(\mathbf{x}) = [B_K^{-1}]^\top \hat{\nabla} \hat{v}(\hat{\mathbf{x}}).$$

On note

$$(5.3) \quad [B_K^{-1}]^\top = \frac{1}{\det B_K} J \quad \text{avec} \quad J = \begin{pmatrix} J_{11} & \dots & J_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ J_{N1} & \dots & J_{NN} \end{pmatrix}.$$

On obtient alors

$$\frac{\partial v}{\partial x_k}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\det B_K} \sum_{m=1}^N J_{km} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}_m}(\hat{\mathbf{x}}).$$

Si on note  $\hat{l}_i(\hat{\mathbf{x}}) = l_i(\mathbf{x})$  les fonctions de base associées à l'élément de référence  $\hat{K}$ , on obtient

$$(5.4) \quad W^{k,l} = \frac{1}{|\det B_K|} \sum_{m,n=1}^N J_{km} J_{ln} \widehat{W}^{m,n}$$

où  $W^{k,l} = (W_{i,j}^{k,l})$  et  $\widehat{W}^{k,l} = (\widehat{W}_{i,j}^{k,l})$  avec

$$(5.5) \quad \widehat{W}_{i,j}^{k,l} = \int_{\hat{K}} \frac{\partial \hat{l}_i}{\partial \hat{x}_k} \frac{\partial \hat{l}_j}{\partial \hat{x}_l} d\hat{\mathbf{x}}.$$

*Remarque.* On voit facilement que  $\widehat{W}^{m,n} = (\widehat{W}^{n,m})^\top$ .

A5.1.1. *Cas 2D : Éléments Finis  $\mathbb{P}_2$ .* Compte tenu de la remarque précédente, il y a 3 matrices élémentaires de taille  $6 \times 6$  à calculer :  $\widehat{W}^{1,1}$ ,  $\widehat{W}^{2,2}$  et  $\widehat{W}^{1,2}$ . La matrice  $B_K$  de la transformation affine  $F_K$  est donnée par (2.1) et on a

$$B_K^{-1} = \frac{1}{\det B_K} \begin{pmatrix} y_3 - y_1 & -(x_3 - x_1) \\ -(y_2 - y_1) & x_2 - x_1 \end{pmatrix}$$

et par conséquent

$$J = \begin{pmatrix} y_3 - y_1 & -(y_2 - y_1) \\ -(x_3 - x_1) & x_2 - x_1 \end{pmatrix}.$$

On obtient ainsi les relations

(5.6)

$$\boxed{\begin{aligned} W^{1,1} &= \frac{1}{2|K|} \left[ (y_3 - y_1)^2 \widehat{W}^{1,1} - (y_2 - y_1)(y_3 - y_1) \left( \widehat{W}^{1,2} + (\widehat{W}^{1,2})^\top \right) + (y_2 - y_1)^2 \widehat{W}^{2,2} \right] \\ W^{2,2} &= \frac{1}{2|K|} \left[ (x_3 - x_1)^2 \widehat{W}^{1,1} - (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \left( \widehat{W}^{1,2} + (\widehat{W}^{1,2})^\top \right) + (x_2 - x_1)^2 \widehat{W}^{2,2} \right] \\ W^{1,2} &= \frac{1}{2|K|} \left[ -(x_3 - x_1)(y_3 - y_1) \widehat{W}^{1,1} + (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) \widehat{W}^{1,2} \right. \\ &\quad \left. + (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) (\widehat{W}^{1,2})^\top - (x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \widehat{W}^{2,2} \right] \end{aligned}}$$

Les fonctions de bases  $\hat{l}_i$  sont liées aux coordonnées barycentriques  $\hat{\lambda}_i$  du triangle de référence. Elles sont données par (2.6). En utilisant la formule d'intégration des coordonnées barycentriques (2.3) ou bien directement avec (2.2) et `mapple...`, on obtient

$$\widehat{W}^{1,1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 8 & 0 \\ -4 & -4 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad \widehat{W}^{2,2} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & -8 \\ -4 & 0 & -4 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 0 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\widehat{W}^{1,2} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & 4 & 4 \\ -4 & 0 & 0 & -4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

A5.1.2. *Cas 2D : Éléments Finis  $\mathbb{Q}_2$ .* On suppose que  $\Omega$  est un rectangle. La matrice  $B_K$  de la transformation affine  $F_K$  est donnée par (cf. (2.1) et Fig. 8).

$$B_K = \begin{pmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & h_2 \end{pmatrix}$$

avec  $h_1 = h_x^K = x_2 - x_1$  et  $h_2 = h_y^K = y_4 - y_1$ . On a donc

$$J = h_1 h_2 \begin{pmatrix} 1/h_1 & 0 \\ 0 & 1/h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_2 & 0 \\ 0 & h_1 \end{pmatrix}.$$

Il y a 3 matrices élémentaires de taille  $9 \times 9$  à calculer :  $\widehat{W}^{1,1}$ ,  $\widehat{W}^{2,2}$  et  $\widehat{W}^{1,2}$  et on a

$$\boxed{W^{k,l} = \frac{|K|}{h_k h_l} \widehat{W}^{k,l}}$$

avec  $|K| = |\det B_K| = |h_1 h_2|$ .

Les fonctions de bases  $\hat{l}_i$  sont données par (3.7). On obtient (avec mapple...)

$$\widehat{W}^{1,1} = \frac{1}{90} \begin{pmatrix} 28 & 4 & -1 & -7 & -32 & 2 & 8 & 14 & -16 \\ 4 & 28 & -7 & -1 & -32 & 14 & 8 & 2 & -16 \\ -1 & -7 & 28 & 4 & 8 & 14 & -32 & 2 & -16 \\ -7 & -1 & 4 & 28 & 8 & 2 & -32 & 14 & -16 \\ -32 & -32 & 8 & 8 & 64 & -16 & -16 & -16 & 32 \\ 2 & 14 & 14 & 2 & -16 & 112 & -16 & 16 & -128 \\ 8 & 8 & -32 & -32 & -16 & -16 & 64 & -16 & 32 \\ 14 & 2 & 2 & 14 & -16 & 16 & -16 & 112 & -128 \\ -16 & -16 & -16 & -16 & 32 & -128 & 32 & -128 & 256 \end{pmatrix},$$

$$\widehat{W}^{2,2} = \frac{1}{90} \begin{pmatrix} 28 & -7 & -1 & 4 & 14 & 8 & 2 & -32 & -16 \\ -7 & 28 & 4 & -1 & 14 & -32 & 2 & 8 & -16 \\ -1 & 4 & 28 & -7 & 2 & -32 & 14 & 8 & -16 \\ 4 & -1 & -7 & 28 & 2 & 8 & 14 & -32 & -16 \\ 14 & 14 & 2 & 2 & 112 & -16 & 16 & -16 & -128 \\ 8 & -32 & -32 & 8 & -16 & 64 & -16 & -16 & 32 \\ 2 & 2 & 14 & 14 & 16 & -16 & 112 & -16 & -128 \\ -32 & 8 & 8 & -32 & -16 & -16 & -16 & 64 & 32 \\ -16 & -16 & -16 & -16 & -128 & 32 & -128 & 32 & 256 \end{pmatrix},$$

$$\widehat{W}^{1,2} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 9 & -3 & -1 & 3 & 12 & 4 & 4 & -12 & -16 \\ 3 & -9 & -3 & 1 & -12 & 12 & -4 & -4 & 16 \\ -1 & 3 & 9 & -3 & 4 & -12 & 12 & 4 & -16 \\ -3 & 1 & 3 & -9 & -4 & -4 & -12 & 12 & 16 \\ -12 & 12 & 4 & -4 & 0 & -16 & 0 & 16 & 0 \\ 4 & -12 & 12 & -4 & -16 & 0 & 16 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & -12 & 12 & 0 & 16 & 0 & -16 & 0 \\ 12 & -4 & 4 & -12 & 16 & 0 & -16 & 0 & 0 \\ -16 & 16 & -16 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A5.1.3. *Cas 3D : Eléments Finis  $\mathbb{Q}_2$ .* On suppose que  $\Omega$  est un parallépipède rectangle. La matrice  $B_K$  de la transformation affine  $F_K$  est donnée par (cf. (2.4) et Fig. 9).

$$B_K = \begin{pmatrix} h_1 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 \end{pmatrix}$$

avec  $h_1 = h_x^K = x_2 - x_1$ ,  $h_2 = h_y^K = y_4 - y_1$  et  $h_3 = h_z^K = z_5 - z_1$ .

Il y a 3 matrices élémentaires de taille  $27 \times 27$  à calculer :  $\widehat{W}^{1,1}$ ,  $\widehat{W}^{2,2}$  et  $\widehat{W}^{1,2}$  et on a

$$W^{k,l} = \frac{|K|}{h_k h_l} \widehat{W}^{k,l}$$

avec  $|K| = |\det B_K| = |h_1 h_2 h_3|$ .

**A5.2. Matrice de masse.** La matrice de masse élémentaire est définie par :

$$M_{i,j} = \int_K l_i l_j d\mathbf{x}$$



où  $l_i$  sont les fonctions de base associées à l'élément courant  $K$  de  $\mathcal{T}_h$ . Par le changement de variable  $F_K$ , on obtient

$$M_{i,j} = |\det B_K| \widehat{M}_{i,j} \quad \text{avec} \quad \widehat{M}_{i,j} = \int_{\widehat{K}} \hat{l}_i \hat{l}_j d\widehat{\mathbf{x}}.$$

A5.2.1. Cas 2D : Eléments Finis  $\mathbb{P}_2$ . La matrice de masse élémentaire  $M$  est de taille  $6 \times 6$  et on a  $|\det B_K| = 2|K|$ .

$$M = \frac{|K|}{180} \begin{pmatrix} 6 & -1 & -1 & -4 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & -1 & 0 & -4 & 0 \\ -1 & -1 & 6 & 0 & 0 & -4 \\ -4 & 0 & 0 & 32 & 16 & 16 \\ 0 & -4 & 0 & 16 & 32 & 16 \\ 0 & 0 & -4 & 16 & 16 & 32 \end{pmatrix}$$

A5.2.2. Cas 2D : Eléments Finis  $\mathbb{Q}_2$ . La matrice de masse élémentaire  $M$  est de taille  $10 \times 10$  et on  $|\det B_K| = |K|$ .

$$M = \frac{|K|}{3150} \begin{pmatrix} 111/2 & -12 & 7/4 & -12 & 29 & -6 & -6 & 29 & 17 \\ -12 & 28 & -2 & 7/4 & 19 & 9 & -1 & -6 & 7 \\ 7/4 & -2 & 1/2 & -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -3 \\ -12 & 7/4 & -2 & 28 & -6 & -1 & 9 & 19 & 7 \\ 29 & 19 & -1 & -6 & 212 & 7 & -28 & 17 & 136 \\ -6 & 9 & -1 & -1 & 7 & 12 & -3 & -28 & -24 \\ -6 & -1 & -1 & 9 & -28 & -3 & 12 & 7 & -24 \\ 29 & -6 & -1 & 19 & 17 & -28 & 7 & 212 & 136 \\ 17 & 7 & -3 & 7 & 136 & -24 & -24 & 136 & 448 \end{pmatrix}$$

**A5.3. Matrice de la divergence.** La matrice élémentaire de la divergence est définie par :

$$B_{i,j}^{(l)} = \int_K \frac{\partial l_i}{\partial x_l} w_j d\mathbf{x}$$

où  $l_i$  et  $w_j$  sont les fonctions de base respectivement des espaces  $V_h$  et  $Y_h$ , associées à l'élément courant  $K$  de  $\mathcal{T}_h$ . En effectuant le changement de variable  $\widehat{\mathbf{x}} = F_K(\widehat{\mathbf{x}}) = B_K \widehat{\mathbf{x}} + b_K$  dans les intégrales et en utilisant les relations (5.2), (5.3), on obtient

$$B_{i,j}^{(l)} = \text{signe}(\det B_K) \sum_m J_{lm} \widehat{B}_{i,j}^{(m)} \quad \text{où} \quad \widehat{B}_{i,j}^{(m)} = \int_{\widehat{K}} \frac{\partial \hat{l}_i}{\partial \hat{x}_m} \hat{w}_j d\widehat{\mathbf{x}}.$$

A5.3.1. Cas 2D : Eléments Finis  $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$ . Les fonctions de base  $\hat{l}_i$  (vitesse  $\mathbb{P}_2$ ) sont données par (2.6) et les fonctions de base  $\hat{w}_j = \hat{\lambda}_j$  (pression  $\mathbb{P}_1$ ) sont les coordonnées barycentriques données par (2.2). Il y a 2 matrices élémentaires de taille  $6 \times 3$  à calculer.

$$\widehat{B}^{(1)} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{B}^{(2)} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

A5.3.2. *Cas 2D : Eléments Finis  $\mathbb{Q}_2/\mathbb{Q}_1$ .* Les fonctions de base  $\hat{l}_i$  (vitesse  $\mathbb{Q}_2$ ) sont données par (3.7) et les fonctions de base  $\hat{w}_j = \hat{\lambda}_j$  (pression  $\mathbb{Q}_1$ ) sont les coordonnées barycentriques données par (3.2). Il y a 2 matrices élémentaires de taille  $9 \times 4$  à calculer.

$$\widehat{B}^{(1)} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} -5 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \\ 4 & -4 & 0 & 0 \\ 2 & 10 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ -10 & -2 & -2 & -10 \\ 8 & -8 & -8 & 8 \end{pmatrix}, \quad \widehat{B}^{(2)} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ -10 & -10 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 2 & 2 & 10 & 10 \\ 4 & 0 & 0 & -4 \\ 8 & 8 & -8 & -8 \end{pmatrix}.$$

### A6. Traitement de la pression

Pour que le problème de Stokes soit bien posé, il faut chercher la pression à moyenne nulle. On peut relâcher cette contrainte supplémentaire en introduisant un multiplicateur de Lagrange  $\lambda \in \mathbb{R}$ . La formulation (1.6),(1.7) est équivalente à :

Trouver  $(\mathbf{u}, p, \lambda) \in H_0^1(\Omega)^3 \times L^2(\Omega) \times \mathbb{R}$  tels que

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^3 \\ b(\mathbf{u}, q) + \lambda \int_{\Omega} q \, d\mathbf{x} &= 0 \quad \forall q \in L^2(\Omega) \\ \int_{\Omega} p \, d\mathbf{x} &= 0 \end{aligned}$$

Le système linéaire devient alors

$$(6.1) \quad A\mathcal{U}_h + B P_h = F_h$$

$$(6.2) \quad B^\top \mathcal{U}_h + \lambda W = 0$$

$$(6.3) \quad W^\top P_h = 0$$

où  $W$  est le vecteur de composante  $W_i = \int_{\Omega} w^{(i)} \, d\mathbf{x}$  et  $w^{(i)}$  sont les fonctions de base de  $Y_h \subset L^2(\Omega)$ . Sous forme matricielle, on obtient

$$\begin{pmatrix} A & B & 0 \\ B^\top & 0 & W \\ 0 & W^\top & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{U}_h \\ P_h \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_h \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

*Remarque.* Une méthode souvent utilisée consiste à fixer la pression (à 0) en un noeud du maillage. Cette méthode conduit à une matrice qui est en général moins bien conditionnée que celle obtenue précédemment avec le multiplicateur de Lagrange.

## Bibliographie

- [1] S.C. Brenner, L.R. Scott, *The mathematical theory of finite element methods*. Texts in Applied Mathematics, 15. Springer-Verlag, 1994.
- [2] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. Masson, Paris, 1983.
- [3] F. Brezzi, M. Fortin, *Mixed and hybrid finite element methods*. Springer Series in Computational Mathematics, 15. Springer-Verlag, 1991.
- [4] A.J. Chorin, *Numerical solution of the Navier-Stokes equations*. Math. Comp., 22, 1968, 745–762.
- [5] P.G. Ciarlet, *The finite element method for elliptic problems*. Studies in Mathematics and its Applications, North-Holland, 1978.
- [6] V. Girault, P.-A. Raviart, *Finite element approximation of the Navier-Stokes equations*. Springer-Verlag, 1981.
- [7] R. Glowinski, *Numerical methods for nonlinear variational problems*. Springer Series in Computational Physics. Springer-Verlag, 1984.
- [8] R. Glowinski, O. Pironneau, *Finite element methods for Navier-Stokes equations*. Annual review of fluid mechanics, Vol. 24, 167–204, 1992.
- [9] M. Marion, R. Temam, *Navier-Stokes equations : theory and approximation*. Handbook of numerical analysis, Vol. VI, 503–688, North-Holland, Amsterdam, 1998.
- [10] O. Pironneau, *Méthodes des éléments finis pour les fluides*. Recherches en Mathématiques Appliquées. Masson, Paris, 1988.
- [11] A. Quarteroni, A. Valli, *Numerical approximation of partial differential equations*. Springer Series in Computational Mathematics, 23. Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [12] R. Rannacher, *On Chorin's projection method for the incompressible Navier-Stokes equations*. The Navier-Stokes equations II—theory and numerical methods (Oberwolfach, 1991), 167–183, Lecture Notes in Math., 1530, Springer, Berlin, 1992.
- [13] R. Temam, *Sur l'approximation de la solution des équations de Navier-Stokes par la méthode des pas fractionnaires (I)*. Arch. Rational Mech. Anal., 32, 1969, 135–153.
- [14] R. Temam, *Navier-Stokes equations*, North-Holland, 1984.