Mathématiques Numériques

Chapitre 3 : Interpolation

Partie II : Interpolation par morceaux, splines

Bruno Pinçon /J.-F. Scheid

Télécom Nancy

2023-2024

version du 26/03/24

III. Interpolation de Lagrange-Hermite

Dans certains problèmes, on est amené à chercher un polynôme qui interpole une fonction f :

- en des points donnés de f (interpolation de Lagrange)
- ainsi que **les dérivées** de f en ces points (pentes données).

C'est l'interpolation de Lagrange-Hermite.

Plus précisément, on se donne des triplets (x_i, y_i, y'_i), pour $i = 0, \ldots, n$, où

$$y_i = f(x_i) \text{ et } y'_i = f'(x_i)$$

sont connus (f' désigne la dérivée de f). On cherche alors un polynôme p (polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite) tel que :

$$\begin{cases} p(x_i) = y_i \\ p'(x_i) = y'_i, \quad \text{pour } i = 0, \ldots, n. \end{cases}$$

On voit clairement qu'on dispose de $2(n+1)$ équations. Il faut donc $2(n+1)$ inconnues et par conséquent on cherche un polynôme de degré $\leq 2n+1$.

Polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite

Le polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite est donné par

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i H_i(x) + \sum_{i=0}^{n} y_i' K_i(x), \tag{1}$$

où les polynômes de Lagrange-Hermite H_i et K_i sont définis par

$$\begin{aligned} H_i(x) &= \left(1 - 2(x - x_i)L_i'(x_i)\right) L_i^2(x), \\ K_i(x) &= (x - x_i)L_i^2(x) \end{aligned}$$

pour $i = 0, \ldots, n$.

On vérifie que H_i et K_i sont bien des polynômes de degré $2n + 1$.

On peut montrer le résultat d'erreur suivant (assez conforme à celui obtenu pour l'interpolation simple de Lagrange) :

Théorème 6. Erreur d'interpolation (Lagrange-Hermite)

Soit f une fonction $(2n+2)$ fois dérivable et soit p son polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite dans $\mathcal{P}_{2n+1}$ associé aux points $x_0 < \ldots < x_n$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un réel $\theta_x \in]\min(x, x_0), \max(x, x_n)[$ tel que :

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(2n+2)!} \Pi_{n+1}^2(x) \, f^{(2n+2)}(\theta_x),$$

avec :

$$\Pi_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$

Preuve admise.

IV. Interpolation polynomiale par morceaux

1. Introduction et motivations.

Si l'interpolation polynomiale avec abscisses de Tchebychev est un puissant moyen d'approximation, elle ne répond pas à tous les besoins car avec des données expérimentales :

- les abscisses ne suivent généralement pas une telle répartition ;
- il y a des erreurs de mesures.

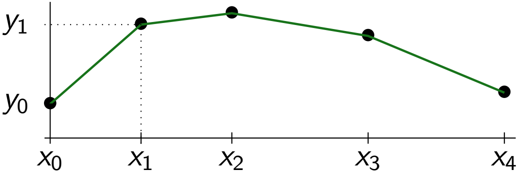
Lorsque les erreurs de mesure sont importantes, il vaut mieux d'ailleurs ne pas interpoler (cf chapitre suivant) mais même avec des erreurs faibles, utiliser un même polynôme sur tout l'intervalle n'est souvent pas adapté :

Une petite variation d'un y_i entraine souvent une grande variation du polynôme d'interpolation.

Alternative : utiliser plusieurs polynômes (au lieu d'un seul) d'où le terme d'*interpolation polynômiale par morceaux* ; l'intervalle total est découpé en "morceaux" (des sous-intervalles en 1-d) et on utilise un polynôme *a priori* différent sur chaque morceau.

2. Interpolation affine par morceaux : la ligne brisée.

Ce procédé consiste à relier deux points d'interpolation consécutifs par un segment de droite :



Sur chaque intervalle $I_k := [x_{k-1}, x_k]$ il s'agit donc d'interpoler par un polynôme $p_k \in \mathcal{P}_1$, ce qui donne (sous la forme "Lagrange") :

$$p_k(x) = y_{k-1}\left(\frac{x - x_k}{x_{k-1} - x_k}\right) + y_k\left(\frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}\right)$$

Calcul effectif (algorithme). Etant donné x :

1. il faut repérer l'intervalle $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ qui contient x ;
2. puis utiliser la formule précédente (ou une autre équivalente).

Quelle précision ?

Si on suppose que l'on approche une fonction f sur un intervalle $[a, b]$ par ce procédé en utilisant n sous-intervalles

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \quad \text{avec} \quad y_k = f(x_k),$$

que peut-on attendre comme précision pour une fonction suffisamment régulière (on supposera que f est deux fois continûment dérivable sur $[a, b]$) ?

Réponse : sur l'intervalle I_k, le Théorème 4 sur l'erreur d'interpolation nous donne :

$$\max_{x \in I_k} |f(x) - p_k(x)| \leq \frac{1}{2} \max_{x \in I_k} |(x - x_{k-1})(x - x_k)| \max_{x \in I_k} |f''(x)|$$

Il est facile de voir que le maximum de la fonction $x \mapsto |(x - x_{k-1})(x - x_k)|$ sur l'intervalle $[x_{k-1}, x_k]$, est obtenu pour $x = \frac{x_{k-1}+x_k}{2}$. On a donc :

$$\max_{x \in I_k} |f(x) - p_k(x)| \leq \frac{h_k^2}{8} \max_{x \in I_k} |f''(x)| \quad \text{où } h_k = x_k - x_{k-1}.$$

En notant la subdivision $\mathcal{X}_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ et $p^{f,\mathcal{X}_n}$ l'interpolant ainsi construit, on obtient :

$$\boxed{\max_{x \in [a,b]} |f(x) - p^{f,\mathcal{X}_n}(x)| \leq \frac{h^2}{8} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)| \quad \text{où } h = \max_k h_k} \qquad (2)$$

Quand $n \to +\infty$, on a $h \to 0$ et on voit ainsi que :

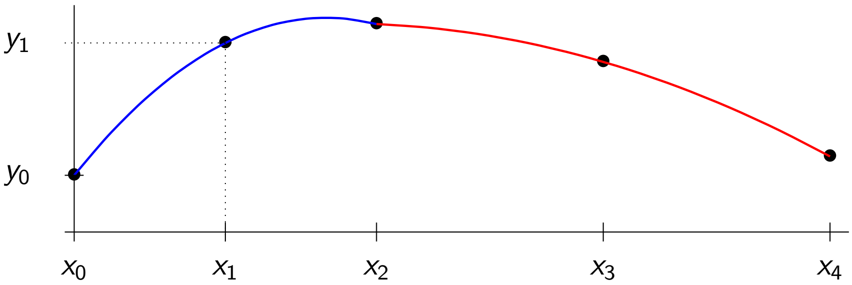
- $\lim_{n \to +\infty} \max_{x \in [a,b]} |f(x) - p^{f,\mathcal{X}_n}(x)| = 0$
- Si on prend une subdivision régulière $h = (b-a)/n$, le procédé converge et quand on double le nombre d'intervalles, la majoration d'erreur (2) est divisée par 4.

Remarque. La convergence de l'interpolation par morceaux est en général beaucoup moins rapide que si on interpole avec un polynôme avec abscisses de Tchebychev mais il y a une certaine souplesse, en particulier au lieu de prendre une subdivision uniforme on a tout intérêt à resserrer les abscisses d'interpolation là où la dérivée seconde de f est grande en module.

4. L'interpolation de Lagrange par morceaux.

Une façon de généraliser *une ligne brisée* est de faire passer un polynôme de $\mathcal{P}_2$ par les 3 points $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ puis un autre polynôme de $\mathcal{P}_2$ par les 3 points $(x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$, etc. . .

En utilisant les mêmes données que dans l'exemple de la ligne brisée on obtient :



On peut généraliser cette approche avec une interpolation par morceaux par des polynômes $\mathcal{P}_3$ associés à 4 points consécutifs ; ou plus généralement, une interpolation par morceaux par des polynômes $\mathcal{P}_k$ associés à $k+1$ points consécutifs.

Défauts de l'interpolation par morceaux.

- L'exemple précédent met bien en évidence le défaut de cette approche : l'interpolant *n'est pas dérivable* en x_2 qui est le noeud intermédiaire entre les deux polynômes.

- Un autre défaut est que le nombre de points d'interpolation doit être impair (si on utilise des polynômes de $\mathcal{P}_3$, il faut que le nombre de points soit en $3m+1$, etc...) ou alors l'un des morceaux doit être un segment de droite.

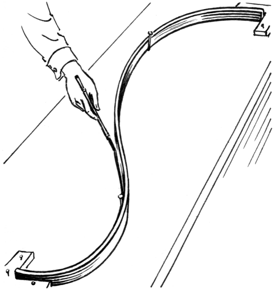
☛ Ce type d'approximation n'est généralement pas utilisé pour interpoler des points donnés (mais peut être utile pour d'autres besoins).

5. Introduction aux splines.

Un domaine très important qui a de nombreuses applications non seulement en mathématiques appliquées mais aussi en CAO.

Motivation : construire des fonctions polynomiales par morceaux mais avec des raccords *plus réguliers* que l'interpolation de Lagrange par morceaux.

« *Spline : une pièce longue, étroite et relativement mince de bois, de métal, etc., une latte. Une bande flexible de bois ou de caoutchouc dur utilisée par les dessinateurs industriels dans le tracé de larges courbes, en particulier dans les travaux ferroviaires.* » The Oxford English Dictionnary 1989.



Une première méthode pour construire une telle fonction polynomiale par morceaux est d'utiliser un polynôme de Lagrange-hermite (avec $n = 1$) sur chaque segment I_k, ce qui va permettre d'obtenir une fonction *continûment dérivable*.

Ce procédé est pratique mais assez limité, les splines permettant d'aller beaucoup plus loin...

(a) Définition des espaces de splines

On se donne un intervalle $[a, b]$ et une subdivision $\mathcal{X}_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ avec $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.

Splines de degré k.

L'espace $\mathcal{S}_k^{\mathcal{X}_n}$ des fonctions *splines* de degré k (on dit aussi splines d'ordre $k+1$) définies sur $[a, b]$ muni de la subdivision $\mathcal{X}_n$ est :

$$\mathcal{S}_k^{\mathcal{X}_n} = \{s \in \mathcal{C}^{(k-1)}([a, b], \mathbb{R}) : s_{|I_j} \in \mathcal{P}_k,\ \forall j \in [\![0, n-1]\!]\}$$

L'espace $\mathcal{S}_k^{\mathcal{X}_n}$ est formé sur chaque intervalle $I_j := [x_j, x_{j+1}]$ d'un polynôme de degré $\leq k$ et ses polynômes se "raccordent" (au moins) jusqu'à l'ordre $k-1$ en chaque noeud interne x_1, x_2, ..., x_{n-1}.

Si on appelle $s_j := s_{|I_j}$ alors les conditions de raccords s'énoncent :

$$\boxed{s_j^{(\ell)}(x_{j+1}) = s_{j+1}^{(\ell)}(x_{j+1}),\ j \in [\![0, n-2]\!],\ \ell \in [\![0, k-1]\!]} \qquad (3)$$

- On a déjà rencontré un tel espace : les *lignes brisées* qui sont des splines de degré 1.
- Il est assez simple de voir que $\mathcal{S}_k^{\mathcal{X}_n}$ est un espace vectoriel. On peut aussi deviner sa dimension avec les arguments suivants (ce raisonnement "empirique" peut être rendu rigoureux...) :
  - on a donc n polynômes (il y a n intervalles) de degré $\leq k$ soit $n \times (k+1)$ coefficients ;
  - cependant ces $n \times (k+1)$ coefficients ne peuvent pas être choisis de manière quelconque car il faut respecter les $(n-1) \times k$ conditions de raccords.

  On en déduit donc que :

$$dim(\mathcal{S}_k^{\mathcal{X}_n}) = n \times (k+1) - (n-1) \times k = n + k$$

- Comme pour les lignes brisées, il n'est pas obligatoire d'exhiber une base d'un tel espace pour faire de l'interpolation. Par exemple on peut construire directement une spline cubique (i.e. de degré 3) d'interpolation.

(b) Splines cubiques.

Elles assurent un raccord C^2 avec des polynômes de degré 3 dans chaque sous-intervalle I_j. A la subdivision $\mathcal{X}_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, on associe les valeurs $y_0, y_1, \ldots, y_n$ (valeurs à interpoler).

Spline cubique

On cherche la spline cubique $s \in \mathcal{S}_3^{\mathcal{X}_n}$ telle que :

$s \in C^2([a, b])$, $s_i \equiv s_{|_{[x_i, x_{i+1}]}} \in \mathcal{P}_3$ pour $i = 0, ..., n-1$ telle que

$$\begin{cases} s(x_i) = y_i, \text{ pour } i = 0, ..., n & (1) \\ s''(a) = s''(b) = 0. & (2) \end{cases}$$

Remarques.

- Pour que s vérifie (1),(2) (et soit unique), il faut chercher s_i comme un polynôme de degré 3 sur $[x_i, x_{i+1}]$. En effet, la continuité fournit $2n$ équations, les raccords des dérivées premières et secondes en fournissent $2(n-1)$ et enfin les conditions de bords (2) en donnent 2, soit au total $4n$ équations.

Si on cherche des polynômes de degré p sur chaque sous-intervalle, il y a $n(p+1)$ inconnues. Pour qu'il y ait autant d'équations que d'inconnues, il faut et il suffit que $p = 3$.

- Les conditions aux bords (2) sont dites *naturelles*. Il existe d'autres choix possibles :
  - Conditions d'Hermite : $s_0'(x_0) = y_0'$, $s_{n-1}'(x_n) = y_n'$ avec y_0', y_n' donnés.
  - Conditions périodiques : $s_0'(x_0) = s_{n-1}'(x_n)$, $s_0''(x_0) = s_{n-1}''(x_n)$.
  - Conditions *not-a-knot* :

$$s_0^{(3)}(x_1) = s_1^{(3)}(x_1)$$
$$s_{n-2}^{(3)}(x_{n-1}) = s_{n-1}^{(3)}(x_{n-1})$$

i.e. raccord C^3 en x_1 et x_{n-1}.

(c) Calcul numérique des splines cubiques.

On note $h_i = x_{i+1} - x_i$ et $M_i = s_i''(x_i)$ (les quantités M_i sont bien définies car les dérivées secondes de s sont continues en x_{i+1}). Par ailleurs, s_i'' est un polynôme de degré 1 sur $[x_i, x_{i+1}]$, donné par

$$s_i''(x) = M_i \frac{(x_{i+1} - x)}{h_i} - M_{i+1} \frac{(x_i - x)}{h_i},$$

pour $x \in [x_i, x_{i+1}]$. En intégrant deux fois, on obtient

$$\boxed{s_i(x) = M_i \frac{(x_{i+1} - x)^3}{6h_i} - M_{i+1} \frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + C_i(x_i - x) + D_i(x_{i+1} - x)}$$

Les quantités M_i **et** C_i**,** D_i **sont inconnues** et donc **à déterminer**.

• Les constantes C_i et D_i sont déterminées à partir des M_i grâce aux relations d'interpolation :

$$y_i = M_i \frac{h_i^2}{6} + D_i h_i, \quad y_{i+1} = M_{i+1} \frac{h_i^2}{6} - C_i h_i.$$

• **Calcul des M_i.** On évalue les dérivées premières en x_{i+1} :

$$s_i'(x_{i+1}) = M_{i+1}\frac{h_i}{2} - \frac{1}{h_i}\left(y_i - M_i\frac{h_i^2}{6} - y_{i+1} + M_{i+1}\frac{h_i^2}{6}\right)$$

$$s_{i+1}'(x_{i+1}) = -M_{i+1}\frac{h_{i+1}}{2} - \frac{1}{h_{i+1}}\left(y_{i+1} - M_{i+1}\frac{h_{i+1}^2}{6} - y_{i+2} + M_{i+2}\frac{h_{i+1}^2}{6}\right)$$

Le raccord C^1 donne (avec $s_i'(x_{i+1}) = s_{i+1}'(x_{i+1})$) :

$$\boxed{M_i\frac{h_i}{6} + M_{i+1}\frac{h_i + h_{i+1}}{3} + M_{i+2}\frac{h_{i+1}}{6} = \frac{1}{h_i}(y_i - y_{i+1}) + \frac{1}{h_{i+1}}(y_{i+2} - y_{i+1})}$$

pour $i = 0, ..., n-2$.

De plus, par hypothèse $M_0 = M_n = 0$ (conditions naturelles).

Les inconnues $u = (M_1, ..., M_{n-1})^T \in \mathbb{R}^{n-1}$ vérifient donc le système linéaire

$$\boxed{Au = b},$$

avec $b = (b_i)_{i=1,\dots,n-1}$ et $b_i = \frac{1}{h_{i-1}}(y_{i-1} - y_i) + \frac{1}{h_i}(y_{i+1} - y_i)$

La matrice A de taille $(n-1, n-1)$ est une matrice tridiagonale, donnée par

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2(h_0+h_1) & h_1 & & & 0 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & h_{n-2} \\ 0 & & & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) \end{pmatrix}$$

La matrice A est symétrique définie positive et en particulier elle est inversible.

Remarque. Les “bonnes” bases de l’espace des splines pour les calculs en arithmétique flottante sont formées de splines particulières appelées B-splines.

(d) Propriétés et estimations d'erreurs des splines cubiques

Soit f une fonction suffisamment régulière et s la spline cubique d'interpolation associée avec une subdivision $\mathcal{X}_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ et des conditions naturelles :

$$\begin{cases} s(x_i) = f(x_i), \ i = 0, ..., n \\ s''(a) = 0, \ s''(b) = 0. \end{cases}$$

On note $h_i = x_{i+1} - x_i$ et $h = \max\limits_{i \in [\![1,n]\!]} h_i$.

Proposition 1.

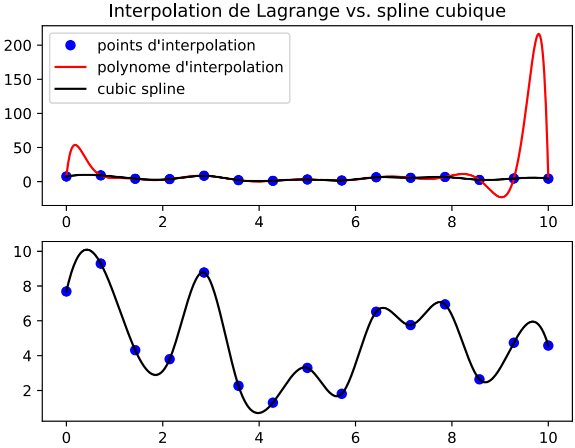
1. Si $f \in C^2([a,b])$ alors on a $\int_a^b |s''(x)|^2 dx \leq \int_a^b |f''(x)|^2 dx$. L'égalité a lieu si et seulement si $f = s$.
2. On note $\beta = h / \min_i h_i$. Si $f \in C^4([a,b])$ alors

$$\|s^{(k)} - f^{(k)}\|_\infty \leq C_k \ h^{4-k} \ \|f^{(4)}\|_\infty, \quad \text{pour } k = 0, \ 1, \ 2, \ 3,$$

avec $C_0 = 5/384, \ C_1 = 1/24, \ C_2 = 3/8$ et $C_3 = (\beta + \beta^{-1})/2$.

Remarques.

- Parmi toutes les fonctions d'interpolation, la spline cubique s est celle qui a la plus petite *énergie* (norme de la dérivée seconde).
- La spline cubique s ainsi que ses dérivées première et seconde convergent uniformément vers f et ses dérivées lorsque h tend vers zéro. Idem avec la dérivée troisième pourvu que β soit borné uniformément.



(e) Splines paramétriques.

Problématique : interpoler des points du plan qui ne sont pas nécessairement sur une courbe définie par le graphe d'une fonction.

☛ On considère une courbe plane paramétrée par $P : [0, T] \to \mathbb{R}^2$, $P(t) = \big(x(t), y(t)\big)$.

☛ On va interpoler cette courbe par une courbe spline en des points donnés $P_i = (x_i, y_i)$, $i = 0, \cdots, n$, du plan.

Pour cela, on introduit les $(n+1)$ points $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ définis par

$$t_0 = 0, \quad t_i = \sum_{k=1}^{i} l_k,\ \ i = 1, \cdots, n$$

où l_k est la longueur du segment $P_{k-1}P_k$:

$$\boxed{l_k = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2}}$$

Le paramètre t_i représente donc la longueur cumulée des segments joignant le point P_0 au point P_i.

On détermine alors les deux splines (cubiques) d'interpolation s_x et s_y associées respectivement à (t_i, x_i) et (t_i, y_i) pour $i = 0, \cdots, n$ et qui interpolent respectivement $x(t)$ et $y(t)$.

La courbe paramétrique

$$\boxed{\begin{array}{rcl} S : [0, t_n] & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & S(t) = \Big(s_x(t), s_y(t)\Big) \end{array}}$$

est appelée **spline cubique paramétrique**.