MÉTHODE DU SIMPLEXE DUAL (REVISITÉE)

J.F. SCHEID

1. Introduction

La méthode du simplexe dual (C.E. Lemke 1954 [4], E.M.L. Beale 1954 [3]) consiste à appliquer la méthode du simplexe au problème dual en travaillant avec des solutions de base qui ne sont pas nécessairement positives (donc pas nécessairement réalisables). On considère un problème d'optimisation linéaire (programme linéaire) écrit sous forme standard (contraintes égalités) :

$$\tag{1} \begin{aligned} &\max_{\mathbf{x}} \Big[F(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \Big] \\ &\begin{cases} A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Le problème dual de (1) s'écrit

$$\tag{2} \begin{aligned} &\min_{\mathbf{y}} \Big[G(\mathbf{y}) = \mathbf{b}^\top \mathbf{y} \Big] \\ &\begin{cases} A^\top \mathbf{y} \geq \mathbf{c} \\ \mathbf{y} \text{ de signes quelconques} \end{cases} \end{aligned}$$

ou bien encore sous forme standard

$$\tag{3} \begin{aligned} &\min_{(\mathbf{y},\boldsymbol{\xi})} \Big[G(\mathbf{y},\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{b}^\top \mathbf{y} \Big] \\ &\begin{cases} A^\top \mathbf{y} - \boldsymbol{\xi} = \mathbf{c} \\ \mathbf{y} \text{ de signes quelconques,} \\ \boldsymbol{\xi} \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

A chaque itération de la méthode du simplexe dual, les variables *primales* entrante et sortante de (1) sont déterminées en examinant le problème dual (2). Cette méthode s'applique en ayant déjà déterminer une solution de base réalisable pour le problème dual. C'est par exemple le cas si $\mathbf{c} \leq 0$ [1] dans (2). La méthode du simplexe dual peut aussi être utilisée en analyse de sensibilité lorsqu'on a déjà obtenu une solution optimale. Si on modifie le vecteur $\mathbf{b}$ la solution duale optimale précédente reste une solution de base réalisable pour le dual. On peut alors appliquer le simplexe dual (avec le nouveau $\mathbf{b}$) en partant de cette solution de base duale réalisable.

Pour commencer, on supposera d'abord qu'on dispose d'une solution de base *réalisable* pour le problème dual. On verra ensuite (cf. Section 5. Extension) qu'on peut relacher cette hypothèse de départ et obtenir ainsi une méthode permettant de s'affranchir de la

Date: 24 octobre 2020.

1. Si $\mathbf{c} \leq 0$, on a alors une solution de base duale réalisable évidente en prenant comme variables de bases duales les variables d'écart duales $\boldsymbol{\xi} = -\mathbf{c} \geq 0$ et $\mathbf{y} = 0$.

phase d'initialisation (Phase 1) quand celle-ci est nécessaire. L'algorithme du simplexe dual est présenté ici avec la méthode des dictionnaires.

2. Simplexe et dualité

Commençons par appliquer la notion de dualité aux dictionnaires. La méthode du simplexe avec dictionnaires appliquée à (1) conduit à chaque itération à un dictionnaire *primal* qu'on peut écrire sous la forme

$$\text{(4)} \qquad \begin{array}{|l|} \hline \mathbf{x}_B = \overline{\mathbf{b}} - \overline{A}\mathbf{x}_H \\ \hline F = \overline{F} - \mathbf{L}_H^\top \mathbf{x}_H \\ \hline \end{array}$$

avec $\overline{\mathbf{b}} = A_B^{-1}\mathbf{b}$, $\overline{A} = A_B^{-1}A_H$ et $\mathbf{L}_H$ représente les coûts réduits. On peut interpréter le dictionnaire (4) comme provenant du PL *primal* suivant :

$$(PL) \quad \begin{array}{l} \max\limits_{\mathbf{x}=\begin{pmatrix}\mathbf{x}_B\\ \mathbf{x}_H\end{pmatrix}} \left[F(\mathbf{x}) = \overline{F} + \mathbf{L}_H^\top \mathbf{x}_H\right] \\ \begin{cases} \left(I_d \mid \overline{A} \right)\begin{pmatrix}\mathbf{x}_B\\ \mathbf{x}_H\end{pmatrix} = \overline{\mathbf{b}} \\ \mathbf{x}_B,\, \mathbf{x}_H \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

qui admet le problème *dual* suivant mis sous forme standard :

$$(PLD) \quad \begin{array}{l} \min\limits_{(\mathbf{y},\boldsymbol{\xi})} \left[G(\mathbf{y},\boldsymbol{\xi}) = \overline{F} + \overline{\mathbf{b}}^\top \mathbf{y}\right] \\ \begin{cases} \overline{A}^\top \mathbf{y} - \boldsymbol{\xi} = \mathbf{L}_H \\ \mathbf{y},\, \boldsymbol{\xi} \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

Le dictionnaire du simplexe associé à (PLD) s'écrit alors

$$\text{(5)} \qquad \begin{array}{|l|} \hline \boldsymbol{\xi} = -\mathbf{L}_H + \overline{A}^\top \mathbf{y} \\ \hline G = \overline{F} + \overline{\mathbf{b}}^\top \mathbf{y} \\ \hline \end{array}$$

On pose $\mathbf{y}_H = \boldsymbol{\xi}$ et $\mathbf{y}_B = \mathbf{y}$. Le dictionnaire (5) se réécrit

$$\text{(6)} \qquad \begin{array}{|l|} \hline \mathbf{y}_H = -\mathbf{L}_H + \overline{A}^\top \mathbf{y}_B \\ \hline G = \overline{F} + \overline{\mathbf{b}}^\top \mathbf{y}_B \\ \hline \end{array}$$

Définition 2.1.

i) On dira que (6) *est le dictionnaire dual du dictionnaire* primal (4).

ii) Si $\mathbf{L}_H \leq 0$*, on dira que la solution de base* $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}\mathbf{x}_B\\ \mathbf{x}_H\end{pmatrix}$ *associée à* (4) *est dual-réalisable.*

Remarque. Si la solution de base duale $(\mathbf{y}_H, \mathbf{y}_B)$ du dictionnaire dual (6) est *réalisable* i.e. si $\mathbf{y}_H \geq 0$ alors la solution de base $\mathbf{x}$ est *dual-réalisable.*

Dans certaines situations, il peut être avantageux de résoudre le problème dual plutôt que le problème primal. Par exemple, pour un PL sous forme canonique pure avec m contraintes inégalités et n variables, si m est beaucoup plus grand que n on aura intérêt à résoudre par simplexe le problème dual. Celui-ci comporte n contraintes ($n \ll m$) et on sait que le côut de la méthode du simplexe dépend essentiellement du nombre de contraintes et peu du nombre de variables. Si on résout le problème dual par la méthode des dictionnaires et qu'on obtient une solution optimale duale alors le dictionnaire dual final obtenu est de la forme (6) et on en déduit une solution optimale pour le problème primal :

$$\mathbf{x}_B^* = \overline{\mathbf{b}},\ \mathbf{x}_H^* = 0.$$

qui est associée au dictionnaire primal (4). Dans la méthode du simplexe dual, on applique le simplexe sur le problème dual mais de façon implicite en continuant à travailler sur le problème primal.

3. Méthode du simplexe dual

3.1. **Principe de la méthode.** On suppose qu'on dispose d'une solution de base initiale *duale-réalisable* mais non nécessairement *réalisable* au sens où on n'a pas nécessairement positivité des variables de base. Au cours des itérations de la méthode du simplexe dual, les variables de base $\mathbf{x}_B$ dans le dictionnaire primal (4) ne sont pas forcément toutes positives. En revanche, les solutions de base seront toujours *duale-réalisables.* D'après le dictionnaire primal (4), la solution de base est *réalisable* si et seulement si $\overline{\mathbf{b}} \geq 0$ et on rappelle qu'elle est *duale-réalisable* si $\mathbf{L}_H \leq 0$.

On associe les variables de base *primales* $\mathbf{x}_B$ aux variables *duales* $\mathbf{y}_H$ (mêmes dimensions) et les variables primales hors-base $\mathbf{x}_H$ aux variables duales $\mathbf{y}_B$. A chaque itération de la méthode du simplexe dual, on applique le simplexe sur le problème *dual* **pour déterminer les variables entrante et sortante dans le dictionnaire primal**. Dans le dictionnaire dual, on détermine la variable entrante y_i ($i \in H$) et la variable sortante y_j ($j \in B$). Dans le dictionnaire primal, ces variables correspondent à la variable entrante x_j et à la variable sortante x_i.

On note $\overline{\mathbf{b}} = (\bar{b}_i)_{i\in B}$, $\overline{A} = (\bar{a}_{ij})$ et $\mathbf{L}_H = (L_k)_{k\in H}$.

— *Variable duale entrante* : y_i avec $i \in B$ tel que

$$\boxed{\bar{b}_i < 0} \tag{7}$$

S'il existe plusieurs $i \in B$ vérifiant (7), on choisit $i \in B$ tel que $\bar{b}_i = \min\left(\bar{b}_k < 0, k \in B\right)$

— *Variable duale sortante* : y_j avec $j \in H$ est déterminé en maintenant la positivité des variables $\mathbf{y}_H$. On détermine l'indice $j \in H$ tel que $\bar{a}_{ij} < 0$ et

$$\begin{cases} -L_k + \bar{a}_{ik} y_i \geq 0,\ \forall k \in H \\ \bar{a}_{ik} < 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire $\begin{cases} y_i \leq \dfrac{L_k}{\bar{a}_{ik}},\ \forall k \in H \\ \bar{a}_{ik} < 0 \end{cases}$. Ainsi, on choisit $j \in H$ tel que

$$\boxed{\frac{L_j}{\bar{a}_{ij}} = \min_{\substack{k\in H \\ \bar{a}_{ik}<0}} \frac{L_k}{\bar{a}_{ik}}} \tag{8}$$

Méthode du simplexe dual. Dans la méthode du simplexe dual, on ne travaille pas explicitement avec le problème dual mais bien avec le problème primal. A chaque itération, on détermine les indices $i \in B$ vérifiant (7) et $j \in H$ vérifiant (8). On choisit alors x_j comme variable primale *entrante* et x_i comme variable primale *sortante*. La valeur de la variable entrante est alors [2]

$$x_j = \frac{\overline{b}_i}{\overline{a}_{ij}} \geq 0 \tag{9}$$

et $x_i = 0$.

3.2. **Arrêt du simplexe dual.** Dans le simplexe dual, on parcourt les solutions de base non nécessairement réalisables (au sens où on n'a pas nécessairement positivité). En revanche, comme on maintient la positivité des variables de base *duales*, on aura toujours $\mathbf{L}_H \leq 0$. On distingue les différentes situations suivantes :

1. Il n'existe pas d'indice $i \in B$ vérifiant (7).

   Dans ce cas, on a $\overline{b}_i \geq 0$, $\forall i \in B$ i.e. $\overline{\mathbf{b}} \geq 0$. La solution de base primale du dictionnaire (4) est alors *réalisable*. Comme on a toujours $\mathbf{L}_H \leq 0$, **la solution de base primale est optimale**. Elle vaut

   $$\mathbf{x}_B^* = \overline{\mathbf{b}}, \quad \mathbf{x}_H^* = 0.$$

2. Il n'existe pas d'indice $j \in H$ vérifiant (8).

   Dans ce cas, on a $\overline{a}_{ij} \geq 0$, $\forall j \in H$ où l'indice $i \in B$ est tel que $\overline{b}_i < 0$. A partir de la relation

   $$x_i = \overline{b}_i - \sum_{j \in H} \overline{a}_{ij} x_j,$$

   on en déduit que $x_i < 0$ quels que soient les $x_j \geq 0$. Par conséquent, **le problème primal n'a pas de solution réalisable**.

Remarque. Le résultat de 2. peut aussi s'obtenir en raisonnant directement sur le dual. En effet, pour tout $j \in H$, on a

$$y_j = -L_j + \overline{a}_{ij} y_i$$

et on voit que $y_j \geq 0$ quel que soit $y_i \geq 0$ car $\overline{a}_{ij} \geq 0$ et $L_j \leq 0$. Par conséquent on a une solution de base duale réalisable et y_i n'est pas borné, G n'est donc pas bornée ($\min G = -\inf$). Le problème dual admettant un optimum infini, on en déduit que le primal n'a pas de solution réalisable (cf. correspondance primal/dual).

2. Cela se déduit de la relation $0 = x_i = \overline{b}_i - \overline{a}_{ij} x_j$

4. Exemple : solution de base initiale duale-réalisable

On considère le programme linéaire

$$\max_{(x_1,x_2,x_3)} \left[F(x_1,x_2,x_3) = -x_1 - 4x_2 - 4x_3\right].$$

$$(10) \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 11 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 15 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

qui admet la forme standard suivante :

$$\max_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^5} \left[F(\mathbf{x}) = -x_1 - 4x_2 - 4x_3\right].$$

$$(11) \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + e_1 = 11 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - e_2 = 15 \\ x_1, x_2, x_3, e_1, e_2 \geq 0 \end{cases}$$

On remarquera que (11) n'admet pas de solution de base réalisable évidente (on ne peut pas choisir $e_2 = -15$). On initialise la méthode du simplexe dual avec la solution de base *non-réalisable* :

$$\mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -15 \end{pmatrix}, \ \mathbf{x}_H = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

mais puisque $\mathbf{c} = (-1,-4,-4)^\top \leq 0$, elle est *duale-réalisable.*

$\star$**<u>Itération 1</u>**. Le dictionnaire initial s'écrit

$e_1 = 11 - x_1 - 2x_2 - 2x_3$
$e_2 = -15 + x_1 + 3x_2 + 2x_3$
$F = -x_1 - 4x_2 - 4x_3$

Variable sortante $x_s = e_2$ car $\overline{b}_2 = -15 < 0$.
Variable entrante x_e. On calcule $L_k/\overline{a}_{sk}$ pour $k \in H$ tel que $\overline{a}_{sk} < 0$.

$$\min_{\overline{a}_{sk}<0} \left(\frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{-1}}, \frac{-4}{-3}, \frac{-4}{-2}\right) = \frac{-1}{-1} \text{ et donc } x_e = x_1 = 15.$$

On obtient la nouvelle solution de base (toujours non-réalisable)

$$\mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} e_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 15 \end{pmatrix}, \ \mathbf{x}_H = \begin{pmatrix} e_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$\star$**<u>Itération 2</u>**. On effectue le pivotage des variables entrante/sortante pour obtenir le nouveau dictionnaire.

$x_1 = 15 + e_2 - 3x_2 - 2x_3$
$e_1 = -4 - e_2 + x_2$
$F = -15 - e_2 - x_2 - 2x_3$

Variable sortante $x_s = e_1$ car $\overline{b}_2 = -4 < 0$.
Variable entrante x_e. On calcule $L_k/\overline{a}_{sk}$ pour $k \in H$ tel que $\overline{a}_{sk} < 0$.

$$\min_{\overline{a}_{sk}<0} \left(\cancel{\frac{-1}{+1}}, \frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{-1}}, \cancel{\frac{-2}{0}}\right) = \frac{-1}{-1} \text{ et donc } x_e = x_2 = 4.$$

On obtient la nouvelle solution de base (réalisable)

$$\mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \mathbf{x}_H = \begin{pmatrix} e_2 \\ e_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \tag{12}$$

On a obtenu une solution de base réalisable (positivité des variables de base). Comme elle est aussi duale-réalisable, elle est donc optimale et $\max F = -19$.

5. Extension

Dans la présentation faite de la méthode, on a supposé qu'on dispose initialement d'une solution de base *duale-réalisable* (ce qui sous-entend que le problème dual est bien réalisable). On peut étendre la méthode en partant d'une solution de base qui n'est pas duale-réalisable.

Commençons par faire les remarques suivantes.

– Si cette solution de base est réalisable alors on peut appliquer le simplexe primal (sans phase 1).
– Si elle n'est pas réalisable au sens où elle n'est pas positive mais vérifie quand même les contraintes $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, on va voir qu'on peut encore appliquer le simplexe dual.

On suppose donc à présent qu'on a une solution de base $\mathbf{x}$ qui n'est ni *duale-réalisable*, ni *réalisable* mais vérifie $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ($\mathbf{x}$ n'est donc pas positive). On suppose donc qu'on dispose d'une solution de base $\mathbf{x}$ vérifiant (4) telle que

(H1) il existe $i \in B$ tel que $\overline{b}_i \leq 0$ ($\mathbf{x}$ non réalisable) ;
(H2) il existe $j \in H$ tel que $L_j > 0$ ($\mathbf{x}$ non duale-réalisable) ;

En appliquant la méthode du simplexe dual en partant de cette solution de base initiale, on rencontrera une des **3 situations d'arrêt** suivantes (qui sont une généralisation des conditions d'arrêt de la section 3.2) :

Cas d'arrêt du simplexe dual.

(1) Il n'existe pas d'indice $i \in B$ vérifiant (7).

Dans ce cas, on a $\overline{b}_i \geq 0$, $\forall i \in B$ i.e. $\overline{\mathbf{b}} \geq 0$. La solution de base primale du dictionnaire (4) est alors *réalisable*. On distingue 2 cas :

(a) Si $\mathbf{L}_H \leq 0$ alors **la solution de base primale est optimale** (c'est la condition d'optimalité). Elle vaut

$$\mathbf{x}^*_B = \overline{\mathbf{b}}, \quad \mathbf{x}^*_H = 0.$$

(b) S'il existe $j \in H$ tel que $L_j > 0$, alors $y_j < 0$ et comme $\overline{\mathbf{b}} \geq 0$ on ne peut plus diminuer G. Le problème dual n'a pas de solution réalisable. Donc dans ce cas, **le problème primal admet un optimum infini** (cf. correspondance primal/dual).

(2) Il n'existe pas d'indice $j \in H$ vérifiant (8).

Dans ce cas, on a $\overline{a}_{ij} \geq 0$, $\forall j \in H$ où l'indice $i \in B$ est tel que $\overline{b}_i < 0$. A partir de la relation

$$x_i = \overline{b}_i - \sum_{j \in H} \overline{a}_{ij} x_j,$$

on en déduit que $x_i < 0$ quels que soient les $x_j \geq 0$. Par conséquent, **le problème primal n'a pas de solution réalisable**.

Remarque. Le résultat de (2) peut s'obtenir en raisonnant directement sur le dual. En effet, à partir de la relation

$$y_j = -L_j + \overline{a}_{ij} y_i,$$

pour tout $j \in H$, on distingue 2 cas.

i) Si $\overline{a}_{ij} > 0$, $\forall j \in H$ alors on aura $y_j \geq 0$ pour $y_i > 0$ suffisamment grand et ceci quel que soit le signe de L_j. Par conséquent on a une solution de base duale réalisable et y_i n'est pas borné, G n'est donc pas bornée et **le problème dual admet donc un optimum infini** ($\min G = -\inf$).

ii) S'il existe $j \in H$ tel que $\overline{a}_{ij} = 0$, alors on distingue 2 cas :
— Si $L_j \leq 0$ alors $y_j \geq 0$ quelque soit la valeur de y_i. Donc G n'est donc pas bornée, **le problème dual admet un optimum infini**.
— Si $L_j > 0$ alors $y_j < 0$ quelque soit la valeur de y_i. Donc **le problème dual n'a pas de solution réalisable**.

On a montré que dans le cas 2., le problème dual admet soit un optimum infini, soit n'a pas de solution réalisable. On en déduit (cf. correspondance primal/dual) que dans ce cas, le primal n'a pas de solution réalisable.

5.1. **Simplexe dual : s'affranchir de la phase 1.** On suppose qu'on dispose d'une solution de base initiale qui n'est pas nécessairement réalisable, ni duale-réalisable. On peut toujours utiliser une méthode de simplexe primal ou dual directement, *sans avoir recours à une phase d'initialisation* avec variables artificielles (phase 1). En fonction de l'état de la solution de base initiale, on a le schéma de procédure suivant.

solution de base initiale	*réalisable*	*non réalisable*
duale-réalisable	solution optimale	simplexe dual (a)
non duale-réalisable	simplexe primal	simplexe dual (b)

Table 1. Procédure primal/dual en fonction de l'état de la solution de base initiale

La situation (a) correspond à la méthode duale présentée à la Section 3 quand la solution de base initiale est duale-réalisable (mais non-réalisable). Dans la situation (b), les hypothèses (H1) et (H2) sont satisfaites.

Enfin, on remarquera qu'avec un PL sous forme standard

$$\max_{\mathbf{x}} \left[F(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \right]$$
$$\begin{cases} A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{cases}$$

on peut choisir comme solution de base initiale $\mathbf{x}_B = \mathbf{e} = \mathbf{b}$ et $\mathbf{x}_H = 0$ où $\mathbf{e}$ sont les variables d'écart et ceci quels que soient les signes des composantes de $\mathbf{b}$. Le schéma primal/dual ci-dessus s'applique alors avec cette solution de base initiale. Cette solution de base initiale est réalisable si et seulement si $\mathbf{b} \geq 0$, elle est duale-réalisable si et seulement si $\mathbf{c} \leq 0$.

6. Exemples

On considère plusieurs exemples correspondants à la situation (b) de la Table 1, c'est-à-dire avec une solution de base initiale ni réalisable ni duale-réalisable. On donne 3 exemples pour chacune des situations d'arrêt établies précédemment.

6.1. **Solution réalisable optimale.** On considère le programme linéaire

$$\max_{(x_1,x_2,x_3)} \left[F(x_1,x_2,x_3) = 3x_1 + 4x_2 + x_3 \right].$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 8 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 9 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \tag{13}$$

qui admet la forme standard suivante :

$$\max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5} \left[F(\mathbf{x}) = 3x_1 + 4x_2 + x_3 \right].$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + e_1 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - e_2 = 9 \\ x_1, x_2, x_3, e_1, e_2 \geq 0 \end{cases} \tag{14}$$

On remarquera que (14) n'admet pas de solution de base réalisable évidente (on ne peut pas choisir $e_2 = -9$). On initialise la méthode du simplexe dual avec la solution de base *non-réalisable* :

$$\mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \end{pmatrix}, \ \mathbf{x}_H = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

Cette solution de base n'est pas non plus *duale-réalisable* car $\mathbf{c} = (3,4,1)^\top > 0$. On est donc bien dans le cadre des hypothèses (H1) et (H2).

$\star$**Itération 1**. Le dictionnaire initial s'écrit

$e_1 = 8 - x_1 - 2x_2 - 2x_3$
$e_2 = -9 + x_1 + 2x_2 + 3x_3$
$F = 3x_1 + 4x_2 + x_3$

Variable sortante $x_s = e_2$ car $\overline{b}_2 = -9 < 0$.
Variable entrante x_e. On calcule $L_k/\overline{a}_{sk}$ pour $k \in H$ tel que $\overline{a}_{sk} < 0$.

$$\min_{\overline{a}_{sk}<0}\left(\frac{\mathbf{3}}{-\mathbf{1}},\frac{4}{-2},\frac{1}{-3}\right)=-3 \text{ et donc } x_e=x_1=9.$$

On obtient la nouvelle solution de base (toujours non-réalisable)

$$\mathbf{x}_B=\begin{pmatrix}e_1\\x_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\9\end{pmatrix},\ \mathbf{x}_H=\begin{pmatrix}e_2\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$$

⋆**Itération 2**. On effectue le pivotage des variables entrante/sortante pour obtenir le nouveau dictionnaire.

$$\boxed{\begin{array}{l}x_1=9+e_2-2x_2-3x_3\\ e_1=-1-e_2+x_3\\ \hline F=27+3e_2-2x_2-8x_3\end{array}}$$

Variable sortante $x_s=e_1$ car $\overline{b}_2=-1<0$.
Variable entrante x_e. On calcule $L_k/\overline{a}_{sk}$ pour $k\in H$ tel que $\overline{a}_{sk}<0$.

$$\min_{\overline{a}_{sk}<0}\left(\cancel{\frac{3}{+1}},\cancel{\frac{-2}{0}},\frac{-\mathbf{8}}{-\mathbf{1}}\right)=\frac{-8}{-1}=8 \text{ et donc } x_e=x_3=1.$$

On obtient la nouvelle solution de base (réalisable)

$$\mathbf{x}_B=\begin{pmatrix}x_3\\x_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix},\ \mathbf{x}_H=\begin{pmatrix}e_2\\x_2\\e_1\end{pmatrix}=0 \tag{15}$$

⋆**Itération 3**. On obtient le dictionnaire.

$$\boxed{\begin{array}{l}x_3=1+e_2+e_1\\ x_1=6-2e_2-2x_2-3e_1\\ \hline F=19-5e_2-2x_2-8e_1\end{array}}$$

Tous les coûts réduits sont négatifs ($\mathbf{L}_H\leq 0$) et la solution de base (15) est réalisable ($\overline{\mathbf{b}}\geq 0$). Elle est donc optimale (cas (1a) des situations d'arrêt du simplexe dual).

6.2. **Optimum inifini.** On considère le programme linéaire

$$\max_{(x_1,x_2)}\left[F(x_1,x_2)=x_1+3x_2\right]. \\ \begin{cases}x_1+x_2\geq 3\\ x_1-2x_2\geq 5\\ -2x_1+x_2\leq 5\\ x_1,x_2\geq 0\end{cases} \tag{16}$$

qui admet la forme standard suivante :

$$\max_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^5}\left[F(\mathbf{x})=x_1+3x_2\right]. \\ \begin{cases}x_1+x_2-e_1=3\\ x_1-2x_2-e_2=5\\ -2x_1+x_2+e_3=5\\ x_1,x_2,e_1,e_2,e_3\geq 0\end{cases} \tag{17}$$

On initialise la méthode du simplexe dual avec la solution de base *non-réalisable* :

$$\mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \mathbf{x}_H = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

Cette solution de base n'est pas non plus *duale-réalisable* car $\mathbf{c} = (1,3)^\top > 0$. On est donc bien dans le cadre des hypothèses (H1) et (H2).

$\star$**<u>Itération 1</u>**. Le dictionnaire initial s'écrit

$$\begin{array}{|l|}
\hline
e_1 = -3 + x_1 + x_2 \\
e_2 = -5 + x_1 - 2x_2 \\
e_3 = 5 + 2x_1 - x_2 \\
\hline
F = x_1 + 3x_2 \\
\hline
\end{array}$$

Variable sortante $x_s = e_2$ car $\overline{b}_2 = -5 = \min(-3,-5) < 0$.
Variable entrante x_e. On calcule $L_k/\overline{a}_{sk}$ pour $k \in H$ tel que $\overline{a}_{sk} < 0$.
$\min\limits_{\overline{a}_{sk}<0} \left(\dfrac{\mathbf{1}}{-\mathbf{1}}, \cancel{\dfrac{3}{+2}} \right) = \dfrac{1}{-1}$ et donc $x_e = x_1 = 5$.

On obtient la nouvelle solution de base (réalisable)

$$\mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} e_1 \\ x_1 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 15 \end{pmatrix}, \ \mathbf{x}_H = \begin{pmatrix} e_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$\star$**<u>Itération 2</u>**. Après pivotage des variables entrante/sortante on obtient le dictionnaire

$$\begin{array}{|l|}
\hline
e_1 = 5 + e_2 + 2x_2 \\
e_2 = 2 + e_2 + 3x_2 \\
e_3 = 15 + 2e_2 + 3x_2 \\
\hline
F = 5 + e_2 + 5x_2 \\
\hline
\end{array}$$

On a $\overline{\mathbf{b}} = (5,2,15)^\top \geq 0$ et $\mathbf{L}_H = (1,5)^\top$ donc $\mathbf{L}_H$ n'est pas négatif et on est dans le cas (1b) des situations d'arrêt du simplexe dual. Par conséquent, le problème primal admet un optimum infini.

6.3. **Pas de solution de base réalisable.** On considère le programme linéaire

$$\max_{(x_1,x_2)} \left[F(x_1,x_2) = x_1 - x_2 \right].$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right. \tag{18}$$

qui admet la forme standard suivante :

$$\max_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^5} \left[F(\mathbf{x}) = x_1 - x_2 \right].$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + e_1 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + e_2 = 6 \\ x_1 + x_2 - e_3 = 4 \\ x_1, x_2, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{array} \right. \tag{19}$$

On initialise la méthode du simplexe dual avec la solution de base *non-réalisable* :

$$\mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix},\ \mathbf{x}_H = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

Cette solution de base n'est pas non plus *duale-réalisable* car $\mathbf{c} = (1, -1)^\top$ n'est pas négatif. On est donc bien dans le cadre des hypothèses (H1) et (H2).

$\star$**Itération 1**. Le dictionnaire initial s'écrit

$$\boxed{\begin{array}{l} e_1 = 5 - x_1 - 2x_2 \\ e_2 = 6 - 2x_1 - x_2 \\ e_3 = -4 + x_1 + x_2 \\ \hline F = x_1 - x_2 \end{array}}$$

Variable sortante $x_s = e_3$ car $\overline{b}_3 = -4 < 0$.
Variable entrante x_e. On calcule $L_k/\overline{a}_{sk}$ pour $k \in H$ tel que $\overline{a}_{sk} < 0$.
$\min\limits_{\overline{a}_{sk}<0} \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{-1}}, \frac{-1}{-1} \right) = \frac{1}{-1}$ et donc $x_e = x_1 = 4$.
On obtient la nouvelle solution de base (toujours non-réalisable)

$$\mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix},\ \mathbf{x}_H = \begin{pmatrix} e_3 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$\star$**Itération 2**. Après pivotage des variables entrante/sortante on obtient le dictionnaire

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 = 4 + e_3 - x_2 \\ e_1 = 1 - e_3 - x_2 \\ e_2 = -2 - 2e_3 + x_2 \\ \hline F = 4 + e_3 - 2x_2 \end{array}}$$

Variable sortante $x_s = e_2$ car $\overline{b}_3 = -2 < 0$.
Variable entrante x_e. On calcule $L_k/\overline{a}_{sk}$ pour $k \in H$ tel que $\overline{a}_{sk} < 0$.
$\min\limits_{\overline{a}_{sk}<0} \left(\cancel{\frac{1}{2}}, \frac{\mathbf{-2}}{\mathbf{-1}} \right) = \frac{-2}{-1} = 2$ et donc $x_e = x_2 = 2$.

On obtient la nouvelle solution de base (toujours non-réalisable)

$$\mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} e_1 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},\ \mathbf{x}_H = \begin{pmatrix} e_3 \\ e_2 \end{pmatrix} = 0$$

$\star$**Itération 3**. Après pivotage des variables entrante/sortante on obtient le dictionnaire

$$\boxed{\begin{array}{l} x_2 = 2 + e_2 + e_3 \\ x_1 = 2 - e_2 - e_3 \\ e_1 = -1 - e_2 - 3e_3 \\ \hline F = -2e_2 - 3e_3 \end{array}}$$

Variable sortante $x_s = e_1$ car $\overline{b}_3 = -1 < 0$.

Variable entrante x_e. On a $(\overline{a}_{sk})_k = (1,1)^\top \geq 0$ donc il n'existe pas de coefficient $\overline{a}_{sk} < 0$. On est dans le cas (2) des situations d'arrêt. Le problème primal n'admet donc pas de solution de base réalisable.

Références

[1] Bazaraa M. S., Jarvis J. J., Sherali H. D., Linear Programming and Network Flows, 4th Edition, Wiley, 2010.

[2] Banciu M., *Dual simplex.* Wiley Encyclopedia of Operations Research and Management Science (2010).

[3] Beale E. M. L. *An alternative method for linear programming.* Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 50(4), 513-523. (1954)

[4] Lemke C.E., *The dual method of solving the linear programming problem*, Naval Research Logistics Quarterly, John Wiley & Sons, vol. 1(1), pages 36-47. (1954).